

DEA MDFI

Mars 2001

## CODAGE

### Exercice 1

On considère un code linéaire  $C$  de longueur  $n$  et de dimension  $k$  sur le corps fini  $\mathbf{F}_q$ .

Soit  $\mathcal{M}$  une matrice dont les lignes sont tous les mots non nuls de  $C$ .

1) Calculer le nombre de composantes nulles dans chaque colonne de  $\mathcal{M}$  (Utiliser la description des mots de  $C$  au moyen des colonnes d'une matrice génératrice de  $C$ ).

2) En déduire le nombre

$$S = \sum_{x \in C} w(x)$$

où  $w(x)$  désigne le poids de  $x$ .

3) Utiliser le résultat précédent pour trouver une borne supérieure sur le poids minimum de  $C$  et donc sur la capacité de correction de  $C$ .

4) (Question supplémentaire) Trouver, en utilisant le résultat de 2), tous les codes linéaires  $C$  sur  $\mathbf{F}_2$  vérifiant les propriétés suivantes :

- Le poids minimum du code orthogonal de  $C$  est au moins 3.
- Tous les mots non nuls de  $C$  ont le même poids.

### Exercice 2

Constuire un code cyclique de longueur 8 sur  $\mathbf{F}_3$  corrigeant 2 erreurs et permettant de coder 20 messages.

Fournitures demandées :

- Une matrice génératrice.
- Une matrice de contrôle.

On pourra utiliser le polynôme  $x^2 + x + 2$  qui est un polynôme irréductible sur  $\mathbf{F}_3$  et primitif.

### Exercice 3

Soit  $m$  un entier pair,  $m = 2t$ . On note  $xy$  le produit scalaire usuel des deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{F}_2^m$  :

$$xy = \sum_{i=1}^m x_i y_i,$$

et on écrit  $x \perp y$  lorsque  $xy = 0$ . Pour mémoire, le coefficient de Fourier d'une fonction booléenne  $f$  en un point  $a$  de  $\mathbf{F}_2^m$  vaut

$$\hat{f}(a) = \sum_{x \in \mathbf{F}_2^m} (-1)^{f(x) + a \cdot x}.$$

Une fonction booléenne est dite courbe si tous ses coefficients de Fourier sont de module  $2^t$ . On remarque que si  $f$  est courbe alors il existe une fonction booléenne  $\tilde{f}$  tel que  $\hat{f}(a) = (-1)^{\tilde{f}(a)} 2^t$ .

- (1) Montrer que  $f \mapsto \tilde{f}$  est une involution de l'ensemble des fonctions courbes.
- (2) Soit  $q(x)$  la forme quadratique  $q(x) = \sum_{i=1}^t x_i x_{t+i}$ . Montrer par un calcul direct de  $\hat{q}(a)$  que  $q$  est courbe, et préciser la fonction  $\tilde{q}$ .
- (3) Soit  $g$  une fonction arbitraire de  $t$  variables. Montrer que la fonction booléenne  $f: x \mapsto q(x) + g(x_1, \dots, x_t)$  est courbe. Calculer  $\tilde{g}$ .
- (4) Dédurre de (3) que pour tout entier  $2 \leq s \leq t$ , il existe une fonction courbe de degré  $t$ .
- (5) Soit  $f$  une fonction booléenne,  $v$  un vecteur de  $\mathbf{F}_2^m$  et  $S$  un sous-espace vectoriel de dimension  $k$  dans  $\mathbf{F}_2^m$ . Établir la relation

$$2^k \sum_{a \perp S} \hat{f}(a) (-1)^{av} = 2^m \sum_{s \in S} (-1)^{f(s+v)}$$

- (6) Montrer que si  $f$  est courbe alors le poids de la restriction de  $f$  à l'espace affine  $v+S$  est pair dès que la codimension de  $S$  est inférieure ou égale à  $t$ .
- (7) Soit  $f$  une fonction de degré strictement supérieur à  $t$ . Montrer qu'il existe un sous-espace affine  $V$  de codimension  $t$  tel que la restriction de  $f$  à soit de poids impair.
- (8) On dit qu'une fonction booléenne  $f$  est d'indice  $r$  s'il existe un sous-espace affine de dimension  $r$  sur lequel  $f$  est constante et si  $r$  est le plus grand entier satisfaisant à cette propriété.
- (9) Montrer que l'indice d'une fonction courbe est au plus  $t$ .
- (x) Calculer l'indice de la forme quadratique  $q(x)$ .