SUGGESTION DE TRAVAIL

PHILIPPE LANGEVIN

Soit p un nombre premier. Démontrer le premier cas de l'exposant p de l'équation de Fermat c'est prouver l'implication :

$$x^p + y^p = z^p \Longrightarrow p \mid xyz$$

où x, y et z sont, bien entendu, supposés entiers. Le premier résultat général concernant la conjecture de Fermat a été obtenu par Sophie Germain (1776–1831). Il s'agit du joli théorème :

Théorème 1. *Si p et $2p+1$ sont premiers alors le premier cas de Fermat d'exposant p est vérifié.*

Au cours de la conférence, nous avons montré le premier cas de Fermat pour l'exposant 2, je vous suggère de traiter les exposants 3 et 5. Vous commencerez par démontrer le lemme ci-dessous que vous utiliserez dans les exercices qui suivent.

Lemme 1. *Soient a et b deux entiers. Établir la congruence :*

$$(a + bp)^p \equiv a^p \mod p^2$$

en déduire que c^p prend au plus p valeurs modulo p^2 quand c décrit l'ensemble des entiers.

Exercice 1. *Déterminer ces valeurs pour $p = 3$, en éduire le premier cas de Fermat pour l'exposant 3.*

Exercice 2. *Déterminer ces valeurs pour $p = 5$, en éduire le premier cas de Fermat pour l'exposant 5.*

Exercice 3. *Déterminer ces valeurs pour $p = 7$, Il y a une obstruction pour conclure. Laquelle ?*

Université de Toulon

Date: Octobre 2004.