Récréations mathématiques

Nombres de Fibonacci – Suggestions de travail

Exercice 1

On définit une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$X_1 = 1, \qquad X_2 = 3, \qquad X_{n+1} = X_n + X_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

1. Calculer, par récurrence, $X_n^2 - X_{n-1}X_{n+1}$ pour tout n.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} X_n/X_{n+1}$ existe.
3. Calculer cette limite.

Exercice 2

Soit a un entier supérieur ou égal à 2. On définit une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$Y_1 = Y_2 = 1, \qquad Y_{n+1} = aY_n + Y_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

1. Calculer, par récurrence, $Y_n^2 - Y_{n-1}Y_{n+1}$ pour tout n.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} Y_n/Y_{n+1}$ existe.
3. Calculer cette limite.

Exercice 3

On dénote les fractions continues par

$$[a_1, a_2, a_3, \dots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer la valeur de
$$x_n = [n, 1, 1, 1, \dots]$$
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer la valeur de
$$y_n = [n, n, n, n, \dots]$$
3. On se donne deux entiers $a, b > 0$. Calculer
$$z_{a,b} = [a, b, a, b, a, b, \dots]$$
Que se passe-t-il pour $b = 0$?

Exercice 4

Déterminer les développements en fractions continues de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$.

Exercice 5

Quelle est la valeur de

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{1}{2}$

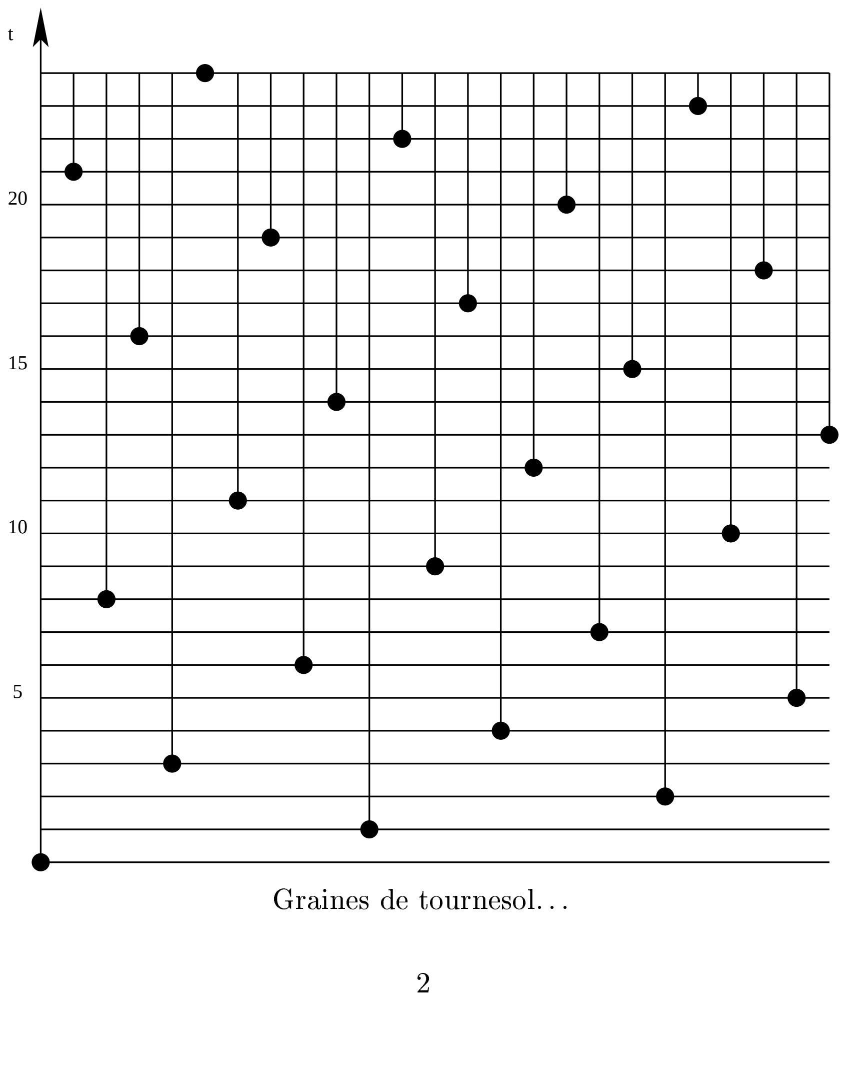
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{11}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{5}{13}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{7}{11}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{6}$

L'arbre de Farey



Graines de tournesol…