Récréations Mathématiques
Suggestion de travail

THEORIE DES JEUX

THIERRY CHAMPION

On considère un jeu représenté sous sa forme normale:

	b_1	b_2	b_3	...	b_m
a_1	$G(a_1,b_1)$	$G(a_1,b_2)$	$G(a_1,b_3)$	...	$G(a_1,b_m)$
a_2	$G(a_2,b_1)$	$G(a_2,b_2)$	$G(a_2,b_3)$	...	$G(a_2,b_m)$
...	...	...	...	...	...
a_n	$G(a_n,b_1)$	$G(a_n,b_2)$	$G(a_n,b_3)$	...	$G(a_n,b_m)$

Le tableau ci-dessus indique que le joueur A dispose de l'ensemble de choix $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et le joueur B de l'ensemble de choix $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$.

Si le joueur A joue $a \in A$ et si le joueur B joue $b \in B$, le joueur A gagne $G(a,b)$ (et le joueur B gagne $-G(a,b)$).

Les trois exercices suivants vous permettront de pratiquer les notions et les méthodes employées pendant l'exposé. Si vous voulez en savoir plus sur la théorie des jeux (en particulier voir plus d'exemples, et une jolie démonstration du théorème de Nash), je vous conseille la référence suivante, qui est un peu technique mais reste très accessible, au moins pour les trois premiers chapitres: *Thèorie des jeux et programmation linéaire*, S. VAJDA, Editions Dunod, code bibliothèque 519.3 VAJ

Exercice 1. On étudie le jeu suivant:

	b_1	b_2
a_1	-1	1
a_2	2	0

Ce jeu possède-t'il un équilibre de Nash au sens des stratégies pures?
Sinon, déterminer un équilibre de Nash $(\overline{a}^*, \overline{b}^*)$ au sens des stratégies mixtes, et donner la valeur du jeu correspondante.

Exercice 2. On étudie le jeu suivant:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	2	3	1
a_2	4	0	0	1

Ce jeu possède-t'il un équilibre de Nash au sens des stratégies pures?
Sinon, donner au moins deux équilibres de Nash $(\overline{a}^*, \overline{b}^*)$ au sens des stratégies mixtes.

Exercice 3. On considère un jeu quelconque, et on suppose qu'il existe un équilibre de Nash $(\overline{a}, \overline{b})$ au sens des stratégies pures. Cela signifie que:

$$G(\overline{a}, \overline{b}) \;=\; \max_{a \in A} G(a, \overline{b}) \;=\; \min_{b \in B} G(\overline{a}, b).$$

(1) Démontrer que dans ce cas:

$$G(\overline{a},\overline{b}) \;=\; \min_{b\in B}\max_{a\in A} G(a,b) \;=\; \max_{a\in A}\min_{b\in B} G(a,b).$$

Indication: n'oubliez pas qu'on a toujours

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B} G(a,b) \;\leq\; \min_{b\in B}\max_{a\in A} G(a,b).$$

(2) Déduire de (1) que si $(\overline{a},\overline{b})$ et $(\overline{a}',\overline{b}')$ sont deux équilibres de Nash, alors

$$G(\overline{a},\overline{b}) \;=\; G(\overline{a}',\overline{b}')$$

(3) Montrer que si $(\overline{a},\overline{b})$ et $(\overline{a}',\overline{b}')$ sont deux équilibres de Nash, alors $(\overline{a}',\overline{b})$ et $(\overline{a},\overline{b}')$ sont aussi des équilibres de Nash.

(4) Donner tous les équilibres en stratégies pures du jeu suivant:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	2	3	2	1
a_2	0	3	-4	0	-1
a_3	-1	-2	2	7	0,5
a_4	1	2,5	6	3	1
a_5	0	5	4	1	-2