# Récréation mathématique

L1 2004/2005

**Prérequis : calcul vectoriel**
**Outils : Théorème de Thalès, homothéties.**

**Exercice 1** :
On se donne deux droites sécantes $(D_1)$ et $(D_2)$ et un point $A$ n'appartenant pas à ces droites. Trouver tous les couples de points $(M, N)$ tels que $A$ soit le milieu de $[MN]$, que $M$ soit sur $(D_1)$ et $N$ sur $(D_2)$.
Peut-on trouver de même un couple de points des deux droites tels que $A$ soit au 2/3 de la distance entre les deux points (par exemple $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NM}$) ?

**Exercice 2** On donne deux droites $D_1$ et $D_2$ sécantes, et un point $A$ n'appartenant à aucune de ces deux droites.
Construire un cercle $(\mathcal{C})$ passant par le point $A$ et tangent aux deux droites.

**Exercice 3** Soit $ABC$ un triangle donné. Construire un carré $MNPQ$ inscrit dans le triangle (i.e dont chacun des sommets appartient aux côtés du triangle).
On remarquera que nécessairement, un des côtés du triangle contient deux sommets du carré.
Combien peut-on trouver de tels carrés ?
Quel est celui dont l'aire est maximale dans le cas ou les trois angles du triangle sont aigus (triangle acutangle) avec $BC > CA > AB$ ?

**Exercice 4** Soit $ABC$ un triangle donné, et $MNP$ un triangle inscrit dans le triangle $ABC$, i.e $M \in ]BC[$, $N \in ]CA[$ et $P \in ]AB[$.
Construire une triangle $A'B'C'$, inscrit dans le triangle $MNP$ et tels que les côtés des triangles $ABC$ et $A'B'C'$ soient parallèles (pour être parfaitement rigoureux, il faudrait dire "aient des supports parallèles").

**Exercice 5** Le but de cet exercice est de prouver un résultat classique du triangle. On doit ce résultat à **Euler**.
Soit $ABC$ un triangle. On notera $D_1$ la droite perpendiculaire à $(BC)$ passant par $A$ (hauteur issue de $A$), $D_2$ la droite perpendiculaire à $(AC)$ passant par $B$ et $D_3$ celle perpendiculaire à $(AB)$ passant par $C$.

1. Montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que l'ensemble des points qui sont à égale distance des points $A$ et $B$ est la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par le milieu du segment $[AB]$.

   Cette droite est appelée médiatrice de $[AB]$.

   En déduire l'existence et la construction d'un unique cercle qui contienne les trois sommets du triangle.

   Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle.

   On note $O$ son centre, et $R$ son rayon.

   On notera $\Delta_1$ la médiatrice de $[BC]$, $\Delta_2$ celle de $[AC]$ et $\Delta_3$ celle de $[AB]$.

2. Soit $G$ le point défini par $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

   Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}$, $3\,\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

   En particulier, regarder ce qui se passe pour $M = G$.

   $G$ est appelé l'isobarycentre du triangle.

3. Soit $f$ l'homothétie de centre $G$, de rapport -2.

   (a) Déterminer par $f$ les images par $f$ des points $A'$, $B'$, $C'$ et des droites $\Delta_1$, $\Delta_2$ et $\Delta_3$.

   (b) En déduire que les hauteurs du triangle $ABC$ sont concourrantes.
   On notera $H$ leur point de concours : c'est l'orthocentre du triangle $ABC$.

   (c) En déduire que $O$, $G$ et $H$ sont alignés, et exprimer $\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{GO}$.

   **La droite qui contient les points $G$, $O$ et $H$ est dite droite d'Euler du triangle $ABC$ lorsqu'elle existe**.

   Dans quel cas, cette droite n'existe pas ?

4. Soit $h$ l'homothétie de centre $G$ et de rapport $\frac{-1}{2}$.

   (a) Justifier que l'image de $\mathcal{C}$ est un cercle $\mathcal{C}'$ dont le centre $O'$ est le milieu de $[OH]$.

   (b) Déterminer l'image du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie $h'$ de centre $H$, de rapport $\frac{1}{2}$.

   (c) Conclure que le cercle $\mathcal{C}'$ contient les milieux des côtés du triangle $ABC$, les pieds des hauteurs du triangle $ABC$ et les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.

   **Le cercle $\mathcal{C}'$ est appelé cercle d'Euler du triangle $ABC$.**