INTRODUCTION A LA THEORIE DES JEUX

Thierry Champion

1. Présentation

La théorie des jeux fait intervenir des outils et des résultats mathématiques souvent perfectionnés et profonds pour résoudre des problèmes qui sont soit purement théoriques, ou apparaissent dans des domaines variés comme l'économie, la sociologie et la psychologie. Cette note est basée principalement sur les livres de I. Ekeland[2] et S. Vajda[1], ainsi que sur des discussions avec A. Soubeyran, professeur à l'Université de la Méditerrannée. On n'abordera ici que des notions et des résultats mathématiques simples.

Commençons par une définition de la théorie des jeux empruntée à I. Ekeland [2]:

> "La théorie des jeux est l'étude des situations où plusieurs personnes ont à prendre des décisions dont dépend un résultat qui les concerne."

Exemple 1.1 (Le dilemne des prisonniers)**.** Deux prisonniers sont soupçonnés d'un délit puni de 3 mois d'emprisonnement. Le juge les interroge séparément. S'ils nient, ils bénéficient tous deux d'une remise de peine d'un mois (au bénéfice du doute). Si l'un avoue (pour les deux) et l'autre pas, celui qui avoue bénéficie d'une remise de 2 mois, l'autre écope d'un mois supplémentaire. Si les deux avouent, ils n'ont aucune remise (et sont condamnés à 3 mois). Si les deux accusés ne peuvent pas se mettre d'accord, ils ont intérêt à avouer (s'ils n'avouent pas, ils courent le risque de prendre 4 mois). Sinon ils gagnent à s'entendre (c'est-à-dire à coopérer l'un avec l'autre) et donc à nier tous les deux.

2. Cadre détude

Dans la suite, on ne considère que des jeux dits non-coopératifs: les joueurs ne collaborent pas et décident donc seuls de leur stratégie. On se restreint également aux jeux à deux joueurs:

- le joueur $\mathcal{A}$ a un ensemble fini $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de choix possibles,
- le joueur $\mathcal{B}$ a un ensemble fini $B = \{b_1, \ldots, a_k\}$ de choix possibles.
- si $\mathcal{A}$ choisit a et $\mathcal{B}$ choisit b, alors $\mathcal{A}$ gagne $G_A(a,b)$ et $\mathcal{B}$ gagne $G_B(a,b)$.

Exemple 2.1 (Le dilemne des prisonniers)**.** $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les deux prisonniers, les ensembles de choix sont les mêmes:

$$A = B = \{avouer, nier\}$$

si $\mathcal{A}$ choisit *avouer* et $\mathcal{B}$ choisit *nier*, $\mathcal{A}$ gagne 2 mois de remise et $\mathcal{B}$ "gagne" -1 mois.

On suppose désormais que les deux joueurs ont des intérêts opposés, dans ce sens qu'on a toujours:

$$G_A(a,b) = -G_B(a,b)$$

ce qui signifie intuitivement que ce que gagne $\mathcal{A}$ est ce que perd $\mathcal{B}$. Un tel jeu est dit *à somme nulle*, car $G_A(a,b) + G_B(a,b) = 0$. Remarquons que le dilemne des prisonniers n'est pas un jeu à somme nulle.

---

[1] S. Vajda, Théorie des jeux et programmation linéaire, *monographies dunod*, Dunod (1968).

[2] I. Ekeland, La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique, *collection sup*, P.U.F. (1974).

On ne s'intéresse alors plus qu'un gain de $\mathcal{A}$, noté $G(a,b) := G_A(a,b)$ (le gain de $\mathcal{B}$ s'en déduisant en prenant l'opposé).

Par la suite, on représentera un jeu sous sa forme normale:

	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_k
a_1	$G(a_1,b_1)$	$G(a_1,b_2)$	$G(a_1,b_3)$	$\dots$	$G(a_1,b_k)$
a_2	$G(a_2,b_1)$	$G(a_2,b_2)$	$G(a_2,b_3)$	$\dots$	$G(a_2,b_k)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_n	$G(a_n,b_1)$	$G(a_n,b_2)$	$G(a_n,b_3)$	$\dots$	$G(a_n,b_k)$

Le tableau ci-dessus indique que le joueur $\mathcal{A}$ dispose de l'ensemble de choix $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ et le joueur $\mathcal{B}$ de l'ensemble de choix $B = \{b_1,\dots,b_k\}$, et donne la valeur $G(a,b)$ du gain de $\mathcal{A}$ pour tous les choix possibles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exemple 2.2 (pierre-feuille-ciseaux)**.** Ce jeu peut être représenté sous sa forme normale de la façon suivante, avec la convention que le gain de $\mathcal{A}$ est 1 s'il gagne le duel, 0 s'il y a match nul et -1 s'il perd.

	$pierre$	$feuille$	$ciseaux$
$pierre$	0	-1	1
$feuille$	1	0	-1
$ciseaux$	-1	1	0

Outre les hypothèses déjà faites, on suppose de plus que les jeux considérés sont:

- *statiques:* chacun des deux joueurs décide d'une stratégie avant le début du jeu et s'y tient;
- *à information complète:* chacun des deux joueurs connait toutes les règles du jeu (i.e. les ensembles de choix A, B et la fonction de gain G);
- *à information inparfaite:* chacun des deux joueurs ignore l'intention de l'autre.

Evidemment ces hypothèses ne sont faites que pour simplifier l'exposé: on n'explore ici qu'une petite partie de la vaste théorie des jeux.

3. Choix d'une stratégie

Dans la suite on nomera stratégie le choix de jeu d'un joueur.

Si le joueur $\mathcal{A}$ joue a, il gagne au moins $\min\limits_{b\in B} G(a,b)$. Une stratégie prudente pour $\mathcal{A}$ est de choisir $\overline{a} \in A$ pour lequel cette quantité est la plus grande possible. Il s'agit donc pour $\mathcal{A}$ de choisir $\overline{a}$ tel que:

$$\min_{b\in B} G(\overline{a},b) = \alpha := \max_{a\in A}\left\{\min_{b\in B} G(a,b)\right\}.$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est assuré de gagner au moins α, quoique joue $\mathcal{B}$.

De la même manière, si $\mathcal{B}$ joue b, il perd au plus $\max\limits_{a\in A} G(a,b)$. Une stratégie prudente pour $\mathcal{B}$ est de choisir $\overline{b} \in B$ pour lequel cette quantité est la plus petite possible. Il s'agit donc pour $\mathcal{B}$ de choisir $\overline{b}$ tel que:

$$\max_{a\in A} G(a,\overline{b}) = \beta := \min_{b\in B}\left\{\max_{a\in A} G(a,b)\right\}.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est assuré de perdre au plus β.

Théorème 3.1 (Principe du minimax)**.** *On a toujours $\alpha \leq \beta$, c'est-à-dire*

$$\max_{a\in A}\left\{\min_{b\in B} G(a,b)\right\} \leq \min_{b\in B}\left\{\max_{a\in A} G(a,b)\right\}.$$

Remarque 3.2. Ainsi, "le plus grand des plus petits" est toujours plus petit que "le plus petit des plus grands".

Preuve. Pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a

$$G(a,b) \leq \max_{a'\in A} G(a',b).$$

En prenant le minimum en b de chaque coté:

$$\min_{b\in B} G(a,b) \leq \min_{b\in B}\left\{\max_{a'\in A} G(a',b)\right\}.$$

Le membre de droite ne dépend pas de a, donc en prenant le maximum en a à droite on obtient

$$\max_{a\in A}\left\{\min_{b\in B} G(a,b)\right\} \leq \min_{b\in B}\left\{\max_{a'\in A} G(a',b)\right\}.$$

□

Exemple 3.3 (pierre-feuille-ciseaux)**.** On a dans ce cas $\alpha = -1 < 1 = \beta$.

Le cas où les valeurs α et β sont égales est particulièrement important du point de vue théorique (alors que c'est rare dans la pratique):

Théorème 3.4. *On suppose que $\alpha = \beta$. On note $\overline{a}$ une stratégie prudente pour $\mathcal{A}$ et $\overline{b}$ une stratégie prudente pour $\mathcal{B}$, c'est-à-dire:*

$$\min_{b\in B} G(\overline{a},b) = \alpha \qquad \textit{et} \qquad \max_{a\in A} G(a,\overline{b}) = \beta.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} G(\overline{a},\overline{b}) \;&=\; \max_{a\in A} G(a,\overline{b}) \;=\; \min_{b\in B} G(\overline{a},b) \;=\; \alpha \;=\; \beta \\ &=\; \max_{a\in A}\left\{\min_{b\in B} G(a,b)\right\} \;=\; \min_{b\in B}\left\{\max_{a'\in A} G(a',b)\right\}. \end{aligned}$$

Preuve. On remarque que

$$\alpha \;=\; \min_{b\in B} G(\overline{a},b) \;\leq\; G(\overline{a},\overline{b}) \;\leq\; \max_{a\in A} G(a,\overline{b}) \;=\; \beta,$$

et comme $\alpha = \beta$, on obtient bien:

$$G(\overline{a},\overline{b}) \;=\; \max_{a\in A} G(a,\overline{b}) \;=\; \min_{b\in B} G(\overline{a},b) \;=\; \alpha \;=\; \beta.$$

□

Définition 3.5. Un couple $(\overline{a},\overline{b}) \in A \times B$ est appelé *équilibre* du jeu si

$$G(\overline{a},\overline{b}) \;=\; \max_{a\in A} G(a,\overline{b}) \;=\; \min_{b\in B} G(\overline{a},b).$$

Lorsqu'un équilibre $(\overline{a},\overline{b})$ existe, le nombre $G(\overline{a},\overline{b}) = \alpha = \beta$ est appelé *valeur du jeu.*

Remarque 3.6. Comme conséquence des théorèmes 3.1 et 3.4, le jeu admet un équilibre si et seulement si $\alpha = \beta$. De plus, on peut démontrer que si $\alpha = \beta$, alors $(\overline{a},\overline{b})$ est un équilibre si et seulement si les stratégies $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont prudentes. Dans le cas où il n'y a pas d'équilibre, $\alpha \neq \beta$ et donc $\alpha < \beta$ par le principe du minimax 3.1.

Exemples 3.7. Le jeu pierre-feuille-ciseaux 2.2 n'a pas d'équilibre. Par contre, le jeu suivant:

	b_1	b_2
a_1	2	1
a_2	1	0

admet (a_1, b_2) comme équilibre.

Lorsqu'un équilibre existe, chaque joueur a intérêt à choisir une stratégie prudente, qui dans ce cas est une stratégie d'équilibre: $\mathcal{A}$ gagne α (c'est le maximum espéré si $\mathcal{B}$ joue une stratégie prudente) et $\mathcal{B}$ perd β (c'est le minimum espéré si $\mathcal{A}$ joue prudemment). Le choix de chacun des deux joueurs est donc déterminé dans ce cas. Dans la section suivante, on introduit une nouvelle notion pour le cas où le jeu n'a pas d'équilibre.

4. Stratégies mixtes

Dans le cas où il n'y a pas d'équilibre, si chacun des deux joueurs joue une stratégie prudente, alors $\mathcal{A}$ gagne au moins α et $\mathcal{B}$ perd au plus β, et comme $\alpha < \beta$, l'un des deux gagne plus que prévu. Cela ne permet cependant pas de déterminer une stratégie optimale pour chacun.

Considérons par exemple le jeu des pénalties. Le joueur $\mathcal{A}$ tire un pénalty, le joueur $\mathcal{B}$ est le gardien qui veut l'arrêter. Les choix du joueur $\mathcal{A}$ sont a_1="tirer à gauche" et a_2="tirer à droite". Les choix du joueur $\mathcal{B}$ sont b_1="plonger à gauche" et b_2="plonger à droite". Le joueur $\mathcal{A}$ gagne 1 s'il marque, perd 1 sinon:

	b_1	b_2
a_1	-1	1
a_2	1	-1

Comme $\alpha = -1 < 1 = \beta$, il n'y a pas d'équilibre, mais on sait que la stratégie optimale pour $\mathcal{A}$ est de tirer aléatoirement à droite ou à gauche avec une probabilité égale pour chaque coté. C'est ce type de stratégie qu'on modélise dans la définition suivante:

Définition 4.1. L'ensemble A^* des stratégies mixtes pour le joueur $\mathcal{A}$ est l'ensemble dont les éléments a^* sont de la forme

$$a^* = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont les choix possibles pour $\mathcal{A}$ et les nombres $s_1, \ldots, s_n$ sont dans $[0, 1]$ et vérifient $s_1 + \ldots + s_n = 1$. Si le joueur $\mathcal{A}$ choisit la stratégie mixte $a^* = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n$ et si $\mathcal{B}$ choisit la stratégie $b \in B$ l'espérance de gain $G^*(a^*, b)$ pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire ce que A gagne en moyenne, est

$$G^*(a^*, b) = s_1 G(a_1, b) + s_2 G(a_2, b) + \ldots + s_n G(a_n, b).$$

De la même façon, l'ensemble B^* des stratégies mixtes pour le joueur $\mathcal{B}$ est l'ensemble dont les éléments b^* sont de la forme

$$b^* = t_1 b_1 + t_2 b_2 + \ldots + t_k b_k$$

où $b_1, \ldots, b_k$ sont les choix possibles pour $\mathcal{B}$ et les nombres $t_1, \ldots, t_k$ sont dans $[0, 1]$ et vérifient $t_1 + \ldots + t_k = 1$. Si $\mathcal{B}$ choisit b^* et $\mathcal{A}$ joue $a \in A$, alors B perd en moyenne

$$G^*(a, b^*) = t_1 G(a, b_1) + t_2 G(a, b_2) + \ldots + t_k G(a, b_k).$$

Remarque 4.2. Si la stratégie mixte $a^* = s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_na_n$ est telle que $s_i = 1$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $s_l = 0$ pour tout $l \neq i$, alors a^* correspond à la stratégie a_i. De plus on a alors $G^*(a^*, b) = G(a_i, b)$ pour tout $b \in B$.

L'interprétation intuitive de la stratégie mixte $a^* = s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_na_n$ est que le joueur $\mathcal{A}$ décide qu'il jouera a_i avec la probabilité s_i (avant de jouer, il devra tirer au sort son choix, en pondérant chaque choix possible par la probabilité correspondante).

Exemple 4.3 (jeu des penalties)**.** Dans ce jeu, la stratégie mixte $a^* = 1a_1 + 0a_2$ (donc avec $s_1 = 1$ et $s_2 = 0$) signifie que le joueur $\mathcal{A}$ a choisi la stratégie a_1 (il tire toujours à gauche). Par contre, la stratégie mixte $a^* = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$ (donc avec $s_1 = \frac{1}{3}$ et $s_2 = \frac{2}{3}$) signifie que $\mathcal{A}$ a choisi de tirer à gauche avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et à droite avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Remarquons que ce choix est bien un choix *a priori*, compatible avec l'hypothèse de jeu statique: la stratégie de $\mathcal{A}$ est fixée une fois pour toute, même si son action effective dans le jeu est déterminée de manière aléatoire (mais selon des probabilités décidées à l'avance).

5. Equilibres de Nash

Si le joueur $\mathcal{A}$ choisit la stratégie mixte $a^* \in A^*$ et si $\mathcal{B}$ choisit la stratégie $b \in B$, $\mathcal{A}$ espère le gain minimal $\min\limits_{b \in B} G^*(a^*, b)$. Une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{A}$ est alors de choisir $\overline{a}^* \in A^*$ pour lequel cette quantité est la plus grande possible. Il s'agit donc pour $\mathcal{A}$ de choisir $\overline{a}^*$ tel que:

$$\min_{b \in B} G^*(\overline{a}^*, b) = \alpha^* := \max_{a^* \in A^*} \left\{ \min_{b \in B} G^*(a^*, b) \right\}$$

auquel cas $\mathcal{A}$ gagne au moins, en moyenne, α^*.

De la même manière, une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{B}$ est de choisir $\overline{b}^* \in B^*$ pour lequel

$$\max_{a \in A} G^*(a, \overline{b}^*) = \beta^* := \min_{b^* \in B^*} \left\{ \max_{a \in A} G^*(a, b^*) \right\}.$$

Avec ce choix, $\mathcal{B}$ perd alors, en moyenne, au plus β^*.

Le lien entre les quantités α, β, α^* et β^* est donné par:

Propriété 5.1. *On a toujours:* $\alpha \le \alpha^* \le \beta^* \le \beta$.

Preuve. On déduit de la remarque 4.2 que l'ensemble A peut être considéré comme inclus dans A^*, donc:

$$\alpha = \max_{a \in A} \left\{ \min_{b \in B} G(a, b) \right\} \le \max_{a^* \in A^*} \left\{ \min_{b \in B} G^*(a^*, b) \right\} = \alpha^*.$$

De même, on a

$$\beta^* = \min_{b^* \in B^*} \left\{ \max_{a \in A} G^*(a, b^*) \right\} \le \min_{b \in B} \left\{ \max_{a \in A} G(a, b) \right\} \le \beta.$$

Il reste à démontrer que $\alpha^* \le \beta^*$. Pour cela, on introduit la notation suivante: si $\mathcal{A}$ joue $a^* = s_1a_1 + \ldots + s_na_n$ et $\mathcal{B}$ joue $b^* = t_1b_1 + \ldots + t_kb_k$, alors le gain de $\mathcal{A}$, en moyenne, est

$$G^*(a^*, b^*) = s_1t_1G(a_1, b_1) + s_2t_1G(a_2, b_1) + \ldots + s_nt_kG(a_n, b_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} s_it_jG(a_i, b_j).$$

On démontre maintenant que pour tout $a^* \in A^*$ on a

$$\min_{b^* \in B^*} G^*(a^*, b^*) = \min_{b \in B} G^*(a^*, b). \tag{1}$$

En effet, comme tout élément b_j de B peut être identifié à un élément de B^* (voir la remarque 4.2), on a

$$\min_{b^*\in B^*} G^*(a^*,b^*) \;\leq\; \min_{b\in B} G^*(a^*,b).$$

Reste à remarquer que si $b^* = t_1b_1+\ldots+t_kb_k$ est un élément de B^*, et si le minimum du membre de droite de (1) est atteint en b_j, alors on a $G^*(a^*,b_l) \geq G^*(a^*,b_j)$ pour tout $l \in \{1,\ldots,k\}$ et donc

$$\begin{aligned} G^*(a^*,b^*) &= t_1G(a^*,b_1)+t_2G(a^*,b_2)+\ldots+t_kG(a^*,b_k) \\ &\geq t_1G(a^*,b_j)+t_2G(a^*,b_j)+\ldots+t_kG(a^*,b_j) \\ &= (t_1+\ldots+t_k)G(a^*,b_j) \;=\; G(a^*,b_j) \;=\; \min_{b\in B} G^*(a^*,b) \end{aligned}$$

d'où on déduit, en prenant le minimum pour b^* variant dans B^*:

$$\min_{b^*\in B^*} G^*(a^*,b^*) \;\geq\; \min_{b\in B} G^*(a^*,b)$$

et donc l'égalité (1). De cette égalité, on conclut que

$$\alpha^* = \max_{a^*\in A^*}\left\{\min_{b^*\in B^*} G^*(a^*,b^*)\right\}.$$

La même méthode permet d'obtenir que

$$\beta^* = \min_{b^*\in B^*}\left\{\max_{a^*\in A^*} G^*(a^*,b^*)\right\}.$$

Pour obtenir l'inégalité $\alpha^* \leq \beta^*$, il suffit d'appliquer le principe du minimax (théorème 3.1). □

La conclusion qu'on peut tirer de cette propriété est assez intuitive: les joueurs ont intérêt à envisager les stratégies mixtes pour augmenter leur gain, puisque cela leur donne plus de choix. Mais cela indique-t'il qu'une stratégie mixte prudente sera forcément le meilleur choix pour le joueur? La réponse est affirmative, comme l'indique le théorème suivant:

Théorème 5.2. *On a toujours $\alpha^* = \beta^*$. De plus, si $\overline{a}^*$ est une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{A}$ et $\overline{b}^*$ est une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{B}$, alors*

$$G(\overline{a}^*,\overline{b}^*) \;=\; \alpha^* \;=\; \beta^* \;=\; \max_{a^*\in A^*} G(a^*,\overline{b}^*) \;=\; \min_{b^*\in B^*} G(\overline{a}^*,b^*).$$

Définition 5.3. Le nombre $\alpha^* = \beta^*$ est la *valeur du jeu en stratégies mixtes.* Un couple $(\overline{a}^*,\overline{b}^*) \in A^*\times B^*$ est un *équilibre de Nash* si

$$G^*(\overline{a}^*,\overline{b}^*) \;=\; \max_{a^*\in A^*} G(a^*,\overline{b}^*) \;=\; \min_{b^*\in B^*} G(\overline{a}^*,b^*).$$

Le théorème 5.2 est l'un des résultats fondamentaux de la théorie des jeux non coopératifs à somme nulle. Il est dû initialement à J. Von Neumann [3]. On admet ce théorème, ainsi que le fait qu'un jeu a toujours au moins un équilibre au sens de Nash, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ peuvent toujours choisir une stratégie prudente. Par conséquent, chacun des deux joueurs a intérêt à choisir une telle stratégie. Ce théorème résoud donc le jeu, dans ce sens qu'il détermine quelle stratégie doivent choisir les joueurs.

Remarque 5.4. Lorsque le jeu admet un équilibre, on a $\alpha = \alpha^* = \beta^* = \beta$, et une stratégie prudente est aussi une stratégie mixte prudente.

---

[3] J. Von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Math. Annalen.*, **100** (1928), 295–320.

6. Un exemple de calcul d'équilibre de Nash

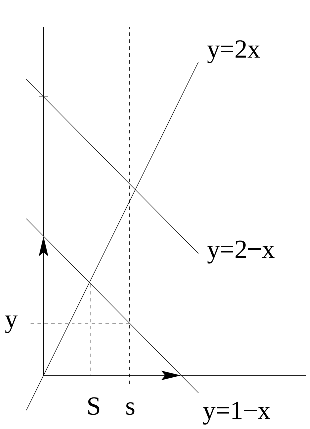
Il reste à voir comment on peut effectivement calculer ces stratégies prudentes, et la valeur du jeu au sens des stratégies mixtes, dans un cas simple. Considérons par exemple le jeu suivant:

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	2	1
a_2	1	0	2

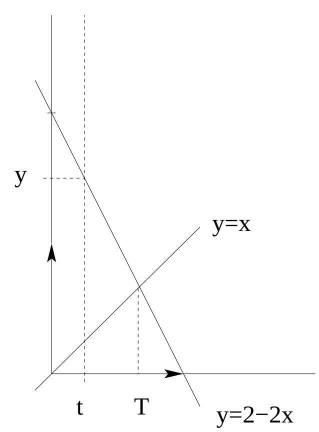
On remarque que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, ce jeu n'a donc pas d'équilibre. On cherche maintenant une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une stratégie de la forme $a^* = s_1a_1 + s_2a_2$ avec $s_1 + s_2 = 1$, donc $s_2 = 1 - s_1$. Il suffit donc de regarder les stratégies mixtes de la forme $a^* = sa_1 + (1-s)a_2$ avec $s \in [0,1]$. Avec une telle stratégie, à $s \in [0,1]$ fixé, $\mathcal{A}$ gagne au moins

$$\begin{aligned}
\min_{b\in B} G^*(a^*, b) &= \min_{j\in\{1,\ldots,3\}} G^*(a^*, b_j) \\
&= \min_{j\in\{1,\ldots,3\}} \{\, sG(a_1, b_j) + (1-s)G(a_2, b_j)\} \\
&= \min\{\, 1-s\,;\, 2s\,;\, s + 2(1-s)\}
\end{aligned}$$

En traçant les droites d'équations $y = 1 - x$, $y = 2x$ et $y = 2 - x$, la valeur de ce minimum est l'ordonnée y du point de coordonnées (s, y) qui appartient à l'une des trois droites et est le plus bas sur le dessin (voir le dessin 1):



dessin 1



dessin 2

La stratégie mixte prudente recherchée consiste à choisir s de sorte que la valeur du minimum $\min\{\, 1-s\,;\, 2s\,;\, s+2(1-s)\}$ soit la plus grande possible, donc à choisir la valeur S du dessin, qui est l'abscisse du point d'intersection entre les droites $y = 1 - x$ et $y = 2x$: on a donc $1 - S = 2S$ donc $S = \frac{1}{3}$.

On déduit de ce qui précède que la stratégie mixte prudente pour $\mathcal{A}$ est $\overline{a}^* = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$, et la valeur α^* du jeu en stratégies mixtes est la valeur du minimum pour $s = S$, donc égale à $\frac{2}{3}$.

Le calcul d'une stratégie mixte prudente pour $\mathcal{B}$ est un peu plus compliqué puisque $\mathcal{B}$ a trois choix. Cependant on voit sur le dessin que si $\mathcal{A}$ joue $\overline{a}^*$, alors $\mathcal{B}$ ne doit pas jouer b_3, donc il n'y a que deux choix intéressants pour $\mathcal{B}$, les choix b_1 et b_2. On cherche donc une stratégie mixte pour $\mathcal{B}$ de la forme $b^* = t_1b_1 + t_2b_2$ (on pose d'emblée $t_3 = 0$) avec $t_1 + t_2 = 1$, donc $t_2 = 1 - t_1$. Il suffit donc de regarder les stratégies mixtes de la forme $b^* = tb_1 + (1-t)b_2$ avec $t \in [0,1]$.

Avec une telle stratégie, $\mathcal{B}$ perd au plus

$$\begin{aligned}\max_{a\in A} G^*(a,b^*) &= \max_{i\in\{1,\ldots,2\}} G^*(a_i,b^*)\\ &= \max_{i\in\{1,\ldots,2\}} \{\, tG(a_i,b_1)+(1-t)G(a_i,b_2)\}\\ &= \max\{\,2(1-t)\,;\,t\,\}\end{aligned}$$

En traçant les droites d'équations $y = 2-2x$ et $y = x$, la valeur de ce maximum est l'ordonnée y du point de coordonnées (t, y) qui est le plus haut sur le dessin (voir le dessin 2). La stratégie mixte prudente recherchée consiste à choisir t de sorte que la valeur du maximum $\max\{\,2-2t\,;\,t\}$ soit la plus petite possible, ce qui correspond à choisir la valeur T du dessin, qui vaut $T = \frac{2}{3}$. Le stratégie mixte prudente pour $\mathcal{B}$ est donc $\overline{b}^* = \frac{2}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2$ et on obtient bien $\beta^* = \frac{2}{3} = \alpha^*$.

A titre d'exercice, on peut vérifier que dans le jeu des pénalties, les stratégies prudentes pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont $\overline{a}^* = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2$ et $\overline{b}^* = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2$, et la valeur du jeu en stratégies mixtes est zéro.