Preuve et Analyse des Algorithmes
LSPI-3 informatique Toulon.

20 juin 2014

Le sujet est composé six exercices indépendants à traiter en moins de deux heures. Aucun document autorisé. Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé…La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

Q 1. Soit n un entier positif. Soit $q > 1$ un nombre réel. On note $Q(n)$ la somme $\sum_{i=0}^{n-1} q^i$. Pour q fixé, lesquelles de ces affirmations sont correctes

1. $Q(n) = \mathrm{O}(q^n)$,
2. $Q(n) = \Theta(q^n)$,
3. $Q(n) \sim q^n$,
4. $Q(n) = \mathrm{o}(q^n)$,

Q 2. On considère la suite de nombre entiers (F_n) définie par les relations :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad \forall n \geq 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

1. Comment s'appelle cette suite ? Quelle est sa nature ?
2. Quel est le lien entre cette suite et l'algoritme d'Euclide ?
3. La récursivité n'est pas appropiée pour calculer F_n. Pourquoi ?
4. Ecrire un algorithme itératif pour calculer F_n.

Q 3. Soit n un entier positif. On note $S(n)$ la somme des n premiers nombres impairs i.e. suite arithmétique de raison 2 de terme initial 1.

1. Exprimer $S(n)$ en fonction de n.

```
int R( long long n )
{ long long t = 1;
  int k = 1;
  while ( n > 0 ) {
        n    = n - t;
        t    = t + 2;
        k    = k + 1;
  }
  return k-1;
}
```

```
void A( n : entier )
{
si (n < 2)
    retourner
sinon
    A(n/2);
    A(n/2);
    B(n)
fsi
}
```

FIGURE 1 – Fonction R. Algorithme A.

2. Que calcule la fonction R en fig. **??** ?
3. Estimer le temps de calcul.
4. Une implantation traite l'intance 2^{30} en 0.004s. Estimer le temps de calcul pour $n = 2^{60}$.

Q 4. On considère le schéma algoritmique fig. **??** . On note $\alpha(n)$, respectivement $\beta(n)$, le temps de calcul de l'algorithme A, respectivement B. Dans la suite n désigne une puissance de 2.

1. Quelle relation de récurrence lie α et β ?
2. On suppose que β est linéaire. Quelle est la forme du temps de calcul de A ?
3. Donner deux exemples d'algorithmes du cours correspondant à la question précédente.
4. Quelle est la forme du temps de calcul de A quand β est quadratique.

Q 5.

1. Déterminer une solution de $24149u + 28681v = 1$.
2. Quel est l'inverse de 24149 modulo 28681 ?

Q 6. On considère la suite de nombre entiers (F_n) définie par les relations :

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 2, \qquad \forall n \geq 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Pour un entier positif z, on note $\nu(z)$ le plus petit entier n tel que $F_n \leq z < F_{n+1}$.

1. Ecrire un algorithme NU(z) pour calculer $\nu(z)$.
2. Montrer par induction sur n que tout entier $F_n \leq z < F_{n+1}$ se décompose en une somme
$$z = \sum_{k=0}^{n-1} z_k F_k, \quad 0 \leq z_k \leq 1,$$
3. La décomposition n'est pas unique, pourquoi ?
4. Montrer que la décomposition devient unique sous la condition
$$\forall k, \quad z_k = 1 \Longrightarrow z_{k+1} = 0.$$
(décomposition de Zeckendorf)
5. Donner la décompositions de 100.
6. Ecrire une fonction `dec(z)` en langage C pour lister les coefficients z_k d'une décomposition de Zeckendorf de z.
7. Préciser la forme du temps de calcul.
8. Préciser le domaine de validité de cette fonction.