

Preuve et Analyse des Algorithmes

14:00–16:00

aucun document autorisé

5 janvier 2015

Q 1. On note Δ le plus grand diviseur commun à 87539319 et 1729.

1. Tracer les étapes de l'algorithme d'Euclide pour obtenir Δ .
2. Utiliser un algorithme d'Euclide étendu efficace pour déterminer deux entiers relatifs u et v tel $87539319u + 1729v = \Delta$.
3. Quels mathématiciens sont généralement associés à la notion de PGCD étendu ?

Q 2. Ecrire une fonction `uint pgcdbin(uint x, uint y)` pour calculer le PGCD de deux entiers non signés. La fonction doit être basée sur les opérateurs usuels, à l'exclusion des opérateurs multiplicatifs : `*`, `/`, `%`.

opérateur	nom	exemple
<code>&</code>	et bit-à-bit	$5 \& 3 = 1$
<code>^</code>	xor bit-à-bit	$5 \wedge 3 = 6$
<code>>></code>	décalage à droite	$5 \lll 3 = 40$
<code><<</code>	décalage à gauche	$5 \ggg 3 = 0$

Q 3. On considère la suite de nombres entiers définie par les relations :

$$G_0 := 0; \quad G_1 := 1; \quad G_2 := 2, \quad \forall n \geq 3, \quad G_n := G_{n-3} + G_{n-2} + G_{n-1}.$$

1. Ecrire algorithme pour calculer G_n .
2. Préciser le temps de calcul.
3. Comparer G à la suite de Fibonacci, en déduire que $G_n = \Omega(1.5^n)$.
4. Montrer par récurrence que

$$\forall n, \quad 2G_n \leq 2^n.$$

Q 4. On rappelle qu'un circuit de longueur n dans un graphe de sommets X et d'arcs V est une suite de $n + 1$ sommets x_0, x_1, \dots, x_n de X tel que :

$$x_n = x_0, \quad \text{et,} \quad \forall i, \quad i < n \implies (x_i, x_{i+1}) \in V.$$

Par définition, un circuit élémentaire ne passe pas deux fois par un même sommet i.e. tous les sommets sont de degrés deux.

1. Un graphe sans circuit élémentaire est sans circuit. Pourquoi ?
2. Ecrire un algorithme pour déterminer l'existence d'un circuit.