

Preuve et Analyse des Algorithmes

Module I41, Licence Informatique, USTV.

Octobre 2010

↯ Le sujet est composé 8 exercices à traiter en moins de 0x5A minutes. Aucun document autorisé. Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

1 Sommes

1. Donner la valeur de

$$1 + 2 + \dots + 10$$

2. Donner la valeur entière par défaut de

$$\log_2(\sqrt{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}})$$

2 Notation asymptotique

Soient f et g deux applications de \mathbf{N} dans \mathbf{N} .

1. Donner la définition de $f = \Theta(g)$.
2. Montrer que si $f = \Theta(g)$ alors $g = \Theta(f)$.

3 Temps de calcul

Une implantation d'un algorithme $A(n:\text{entier})$ dont le temps de calcul est cubique se termine en 2 secondes pour l'instance $n=100$. Estimer le temps de d'exécution de $A(1000)$.

4 Opération

Effectuer les opérations suivantes en base 5 :

$$1234 + 4321, \quad \text{et} \quad 1234 \times 4321.$$

5 Algorithme du cours

Lister dans un tableau tous les algorithmes additifs et multiplicatifs vus en cours sur les nombres de taille n en base B en précisant le temps de calcul de chacun d'eux.

6 Analyse

1. Préciser la forme du temps de calcul de Q .
2. Que fait cet algorithme ?

```
1
2 Algorithme Q(t : nombre, c : chiffre)
3 variable i : indice
4           r : double chiffre
5 debut
6   i := N-1
7   r := 0
8   tantque ( i >=0)
9       r := r * B + t[i]
10      t[i] := r div c
11      r := r mod c
12      i := i - 1
13 ftq
14 fin
```

7 Sauts de Grenouille

Une grenouille doit gravir les n barreaux d'une échelle par sauts successifs sans jamais reculer. En un seul saut, elle peut monter d'un ou deux barreaux mais pas plus. On note G_n , le nombre de toutes les possibilités : $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ et $G_3 = 3$.

- Déterminer G_4 .
- Pour $n \geq 2$, formuler G_n en fonction de G_{n-1} et G_{n-2} .
- Calculer G_{11} .
- Ecrire une fonction récursive en langage C pour calculer G_n .
- Donner la forme du temps de calcul de cette fonction.

8 Reste de la Division par un chiffre

Ecrire un algorithme $c\text{-mod}(x:\text{nombre}, c:\text{chiffre})$ pour calculer x modulo c .