

Preuve et Analyse des Algorithmes

Module I31, Licence Informatique, USTV.

Janvier 2011

↖ Le sujet est composé 6 exercices à traiter en moins de 0x5A minutes. Aucun document autorisé. Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

1 Somme

Soit n un entier non nul. On note z le nombre complexe $\exp(2i\pi/n)$, souvent noté $e^{2i\pi/n}$.

1. Que vaut z et que vaut la somme

$$1 + z + z^2 + z^3 =$$

dans le cas $n = 4$?

2. En général, que vaut :

$$z^n =$$

3. et que vaut la somme :

$$1 + z + \dots + z^{n-1} =$$

2 Notations asymptotiques

1. Vrai ou faux ? Justifier.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = O(n)$$

2. Montrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \sim \ln(n)$$

3 Temps de calcul

```

1 Algorithme E( n : entier)
2 variable i, r : indice;
3     t : table de n booleen;
4 debut
5     r := 0;
6     i := 2;
7     t := [1, 1, ..., 1];
8     tantque ( i < n )
9         si ( t[i] = 1 )
10            alors
11                j := i;
12                tantque ( j < n )
13                    t[ j ] := 0;
14                    j := j + i;
15            ftq
16            r:= r+1;
17            fsi
18            i := i + 1
19    ftq
20    retourner r;
21 fin

```

1. On note $t(i, n)$ le nombre d'itérations de la boucle interne (lignes 13,14) en fonction de i et de n . Montrer que

$$t(i, n) \leq \frac{n}{i}$$

2. En déduire que le nombre total $I(n)$ de ces itérations vérifie

$$I(n) = O(n \log(n)).$$

3. Pour quelles valeurs de $i < n$,

$$t(i, n) = 0?$$

4. Estimer le temps de calcul de l'algorithme.
5. Que fait cet algorithme ?
6. L'inventeur de cet algorithme dirigea la grande bibliothèque d'Alexandrie. De qui s'agit-il ?

4 Grands entiers

On représente les grands entiers comme dans les séances de travaux pratiques :

```

typedef unsigned int uint;
uint taille = 1024;
uint base = 10;
typedef uint * nombre;

```

1. Ecrire une fonction en langage C

```
nombre iton( uint v)
```

qui retourne le nombre ayant pour valeur v .

2. Ecrire une fonction en langage C

```
uint ntoi( nombre z)
```

qui retourne la valeur du nombre z .

3. Ecrire une fonction efficace

`uint parite(nombre z)`

qui retourne la parité de z . La fonction tiendra compte de la parité de la base.

5 Euclide étendu

On note d le plus grand diviseur commun à 1729 et 1089.

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide étendu vu en cours pour déterminer deux entiers u et v tels que

$$1729u + 1089v = d.$$

2. Quel est l'inverse de 1729 modulo 1089 ?

6 Invention

Soit T un tableau de n entiers. Soit p un entier. Faire une séparation de pivot p dans le tableau T c'est permuter les valeurs de T et préciser une position k telle que :

$$\forall i, \quad 0 \leq i < k \implies T[i] \leq p, \quad \text{et} \quad \forall i, \quad k < i < n \implies T[i] \geq p.$$

Par exemple une séparation de pivot 5 du tableau

[1, 2, 6, 8, 9, 3, 5]

est

[1, 2, 3, 8, 9, 6, 5]

avec $k = 2$.

1. Quel algorithme célèbre effectue des séparations dans un tableau ?
2. Ecrire un algorithme

`indice separe(T:tableau, p:valeur)`

qui calcule une séparation de T par rapport à p .

3. Préciser le temps de calcul.