

# Preuve et Analyse des Algorithmes

Module I31, Licence Informatique, USTV.

janvier 2012

↯ Le sujet est composé 4 exercices à traiter en moins de 0x5A minutes. Aucun document autorisé. Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé. . . La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

## 1 Questions de cours

1. Simplifier l'expression

$$1 + 2 + \dots + n =$$

2. Soit  $1 \neq q$  un réel. Vrai ou faux ? Justifier.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \Theta(q^n)$$

3. Quel nombre réel  $\gamma$  vérifie :

$$\log(F_n) \sim \gamma n$$

4. Donner une estimation du temps de calcul de l'addition de deux grands nombre de taille  $N$  en base  $b > 1$ .
5. Combien de multiplications faut-il effectuer pour calculer ,par dichotomie, à  $10^{-6}$  près la racine du polynôme  $X^2 - X - 1$  dans l'intervalle  $[0, 2]$  ?

## 2 Algorithme du cours

1. Ecrire l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de deux entiers.
2. Préciser le temps de calcul dans le contexte des grands nombres de taille  $N$  en base  $b > 1$ .

Pour cette dernière question, vous utiliserez un résultat de Lamé qui affirme que le nombre d'itérations est  $O(N)$ , et vous supposerez que le temps de calcul d'une réduction modulaire est  $O(N^2)$ .

### 3 Analyse d'un algorithme

```
1
2 Algorithme DZ( z : nombre )
3 variable nombre : x, y, t;
4           entier : n;
5 debut
6   x := 0
7   y := 1
8   n := 1
9   tantque ( y <= z )
10      t := x + y;
11      x := y;
12      y := t;
13      n := n+1;
14 ftq
15 tantque ( n > 0 )
16   si ( y > z )
17     alors
18       z := z - y;
19       imprimer 1
20     sinon
21       imprimer 0
22     fsi
23     n := n - 1;
24     t := y - x;
25     y := x;
26     x := t;
27 ftq
28 fin
```

1. Tracer l'exécution de DZ (23).
2. Que fait cet algorithme ?
3. On note  $\nu$  la valeur maximale prise par  $n$  au cours de l'algorithme. Montrer que :  
$$z \leq F_{\nu-1}, \text{ et } z > F_{\nu}.$$
4. Donner une estimation de  $\nu$  en fonction de  $z$ .
5. Préciser le temps de calcul dans le cas scalaire i.e. en considérant des opérations sur les nombres à temps constant.
6. Préciser le temps de calcul dans le cas des grands nombres.
7. On note  $z'$  la différence  $z - F_{\nu-1}$ . Montrer que :  
$$z' < F_{\nu-1}.$$
8. Esquisser une preuve.

### 4 Invention

Soient  $u, v$  deux tableaux de  $n$  entiers triés par ordre croissant. Un algorithme de fusion construit un tableau  $w$  de  $2n$  entiers triés par ordre croissants contenant toutes les valeurs de  $u$  et de  $v$  avec leurs multiplicités.

1. Implanter en langage C une fonction `int * fusion (int u[], int v[], int n)` pour calculer et retourner un tableau dynamique correspondant à la fusion des tableaux  $u$  et  $v$ .
2. Préciser le temps de calcul de la fonction.
3. Décrire un contexte d'utilisation d'un algorithme de fusion.