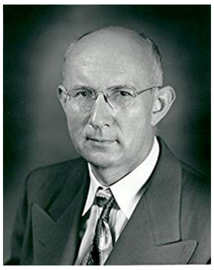
Code Correcteur d'erreur
Master Info 1 Toulon
devoir maison

5 décembre 2019

Devoir à rendre sous forme d'un manuscrit original et personnel lors du contrôle terminal.



Pour un entier $n > 0$, $H(n) := \{0,1\}^n$ désigne l'espace de Hamming mots binaires de n bits. On note $\mathrm{wt}(x)$ le poids binaire de $x \in \{0,1\}^n$. On note $B_n(x,r)$ la boule de rayon r centrée en x, c'est l'ensemble des mots à distance r de x:

$$B_n(x,r) = \{x \in \{0,1\}^n \mid \mathrm{wt}(x) \leq r\}.$$

Le nombre d'éléments $V_n(r)$ d'une boule de rayon r est indépendant de son centre. La capacité de correction d'un code linéaire C est notée $\epsilon(C)$. Le rayon de recouvrement $\rho(C)$ est par définition égal au plus petit entier r tel que l'union des boules de rayon r centrées sur des mots de C recouvre la totalité de l'espace de Hamming, autrement dit, c'est le plus petit entier r tel que

$$\forall y \in H(n) \quad \exists x \in C \qquad \mathrm{wt}(x+y) \leq r$$

L'objectif du devoir est de déterminer les codes linéaire C de petite longueur vérifiant l'égalité $\epsilon(C) = \rho(C)$. Un tel code est dit remarquable.

Q 1. Montrer que pour tout code linéaire C

$$\epsilon(C) \leq \rho(C). \tag{1}$$

Q 2. Décrire avec précision les codes remarquables (triviaux) de dimension 1.

Q 3. Soit e la capacité de correction d'un code linéaire remarquable. Vérifier que les boules de rayon e centrées sur les mots du code forment une partition de l'espace de Hamming.

Q 4. Déduire de la question précédente un condition nécessaire sur les paramètres n, k et $V_n(e)$ pour l'existence d'un code remarquable de capacité de correction e.

Q 5. Décrire avec précision les codes remarquables de rayon 1.

Q 6. Ecrire un programme pour déterminer tous les triplets (n, k, e) satisfaisant à la condition de la question 4 pour les paramètres $1 < k < n$, $e > 1$.

Q 7. Utiliser la table des codes de Markus Grassl pour déterminer les codes remarquables $[n, k, d]$ avec $k > 1$, $n < 64$ et $d > 3$.