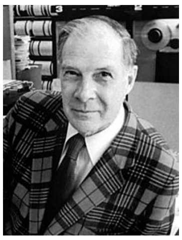
Code Correcteur d'erreur
Master Info 1 Toulon

27 juin 2019



Pour un entier $n > 0$, $\{0,1\}^n$ désigne l'estace de Hamming mots binaires de n bits. On note $\mathrm{wt}(x)$ le poids binaire de $x \in \{0,1\}^n$, et $V(n,r)$ le cardinal de la boule de rayon r i.e.

$$B(n,r) = \{x \in \{0,1\}^n \mid \mathrm{wt}(x) \leq r\}.$$

Un (n, M, d) code est une partie de $\{0,1\}^n$ qui contient M éléments séparés par une distance au moins égale à d. Un $[n, k, d]$ code est sous-espace de dimension k de $\{0,1\}^n$ de distance minimale supérieure ou égale à d. Nous noterons G la matrice génératrice du code de Hamming $[7, 4, 3]$ utilisé dans la figure ci-dessous pour transmettre les messages de 4 bits.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q 1. Donner une matrice de conrôle H du code de Hamming $[7, 4, 3]$.

Q 2. Argumenter sur H pour prouver que la distance minimale est bien égale à trois. Quelle est la capacité de correction du code ?

Q 3. On note $a_3a_2a_1a_0r_1r_2r_3$ l'encodage du message $a_3a_2a_1a_0$. Préciser les valeurs de r_1, r_2 et r_3 en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3.

Q 4. Quel est le syndrôme du mot $abcdefg$?

Q 5. Préciser la table de décodage du code.

Q 6. Décoder tous les mots de poids 3.

Q 7. Représenter le graphe de la probabilité d'erreur aprés décodage du code de Hamming. Estimer cette probabilité d'erreur lorsque la probabilité de transition d'un bit vaut 10^{-6}.

Q 8. Déterminer $V(7, 3)$. Montrer qu'il n'existe pas de $(7, 16, 4)$-code ni de $[7, 4, 4]$-code.

Q 9. Comment obtenir un $[8, 4, 4]$-code à partir du code de Hamming $[7, 4, 3]$?

Q 10. Comment obtenir un $[6, 3, 3]$-code à partir du code de Hamming $[7, 4, 3]$?