Code Correcteur d'erreur
Master Info 1 Toulon

16 janvier 2020

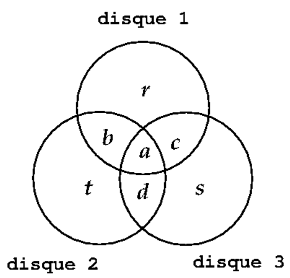
Pour un entier $n > 0$, $\{0,1\}^n$ désigne l'espace de Hamming mots binaires de n bits. On note $\mathrm{wt}(x)$ le poids binaire de $x \in \{0,1\}^n$, et $V(n,r)$ le cardinal d'une boule de rayon r i.e. $B(n,r) = \{x \in \{0,1\}^n \mid \mathrm{wt}(x) \leq r\}$. Un $[n,k,d]$ code est sous-espace de dimension k de $\{0,1\}^n$ de distance minimale supérieure ou égale à d.

Q 1. On considère un $[n,k]$-code binaire. Argumenter à partir d'une matrice génératrice pour montrer que distance minimale du code est inférieure ou égale à $n - k + 1$.

Q 2. Donner un schéma pour décrire une transmission sur un canal bruité avec les mots clés : bruit, canal, codage, décodage, destination et source.

Q 3. On transmet un mot binaire x via un canal bruité symétrique de probabilité de transition p. On note y le mot reçu. Quelle est la probabilité pour que le poid de $x + y$ soit w ?

01001101110111011011110101101000010000100000010010100001000010001



Les mots de $\{0,1\}^7$ de la forme *abcdrst* sont représentés comme dans la figure ci-dessus. On dispose de trois témoins: t_1, t_2 et t_3. Le témoin t_i est égal à la somme binaire des bits du disque numéro i :

$$t_1 := a + b + c + r,$$
$$t_2 := a + d + b + t,$$
$$t_3 := a + c + d + s.$$

On dit que (t_1, t_2, t_3) est la signature de *abcdrst*.

Q 4. On considère un *abcdrst* de signature (t_1, t_2, t_3). Quelle est la signature du mot $\bar{a}bcdrst$, où $\bar{a}$ est le complément de a ?

Q 5. Montrer que l'ensemble des mots des mots de signature $(0,0,0)$ forme un code linéaire. Préciser une matrice de contrôle, une matrice génératrice.

Q 6. Combien de signatures différentes obtient on en changeant au plus un bit d'un mot donné ?

Q 7. Déduire de ce qui précède que tout mot *abcdrst* est à distance au plus un, d'un et un seul mot du code.

Q 8. Décoder le mot 1010111.

01001101110111011011110101101000010000100000010010100001000010001

Q 9. Déterminer $V(23,2)$, $V(23,3)$, $V(23,4)$.

Q 10. Montrer qu'il n'existe pas de $[23,12,8]$.