Algorithmique des Graphes
L3 informatique

A

13 janvier 2020

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé… La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.

Q1. Quelle est la version orientée de l'affirmation : *un cycle élémentaire passe par autant de sommets que d'arêtes.* Les affirmations correspondantes sont elles correctes?

circuit arcs oui

Q2. Soit $p > 0$ un entier. On considère un graphe non orienté d'ordre $2p$ dont chaque sommet est de degré supérieur ou égal à p. Peut-on affirmer que la longueur d'un plus court chemin entre deux sommets est inférieure ou égale à p ?

Oui, le graphe est hamiltonien par Ore ou Dirac

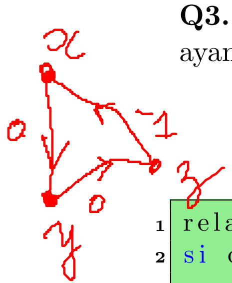
Dans graphe $G(S, A)$ pondéré par une fonction $\mathrm{w}\colon A \to \mathbb{Z}$ à valeurs dans l'ensemble des entiers relatifs, on définit le coût du chemin $\mu = [x_0, x_1, \ldots, x_r]$ par

$$\mathrm{w}(\mu) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{w}(x_{i-1}x_i)$$

Un chemin minimal de x à y est un chemin de coût minimal d'origine x et d'extrémité y. Le coût d'un chemin minimal est noté $\delta(x, y)$. On pose $\delta(x, y) = +\infty$ s'il n'existe pas de chemin de x vers y.

Q3. Donner un exemple de graphe d'ordre 3 ayant deux sommets x et y tel que :

$$\delta(x, y) = -\infty \quad \text{et} \quad \delta(y, x) = +\infty$$




```
1 relacher( u, v, w )
2 si d [ v ] > d[ u ] + w(u,v)
3    alors
4        d[v] := d[ u ] + w(u,v)
```

Q4. Montrer que pour tous sommets x et y :

$$\delta(s, y) \leq \delta(s, x) + \mathrm{w}(x, y)$$

Un chemin de coût minimal de s à x peut être prolongé en un chemin de coût de s à y

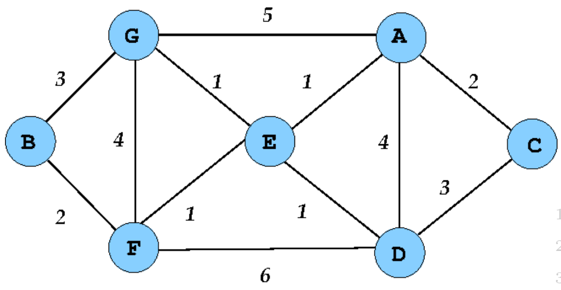
L'algorithme de Dijkstra détermine le coût des chemins minimaux d'une origine s aux autres sommets d'un graphe pondéré par une fonction **positive**. Il utilise deux sous-ensembles E et F des sommets du graphe. Une estimation du coût minimal d'un chemin entre s et x est maintenue dans $d[x]$. À chaque itération un des sommets $u \in F$ minimisant d et qui n'est pas dans E est selectionné (ligne 13), il est retiré de F, ajouté à E, et les estimations des voisins sont mises à jour par la procédure relâchement.

```
7  DIJKSTRA( G, w, s )
8  E := ensemble vide
9  F := sommets de G
10 d := [+inf , +inf , ... , +inf]
11 d [s] := 0
12 tantque non vide ( F )
13  u := extraire( E, F )
14  retirer u de F
15  ajouter u a E
16  pour chaque voisin v de u
17      relacher( u, v, w)
```

9

Q5. Quel algorithme du cours est similaire à l'algorithme de Dijkstra ?

algorithme de Prim



Q6. Faire tourner l'algorithme de Dijkstra sur le graphe ci-dessus en prenant le sommet A pour origine. Tracer le tableau d des estimations après chaque itération.

Q7. L'algorithme de Dijkstra s'arrête. Pourquoi ?

La taille de la file est un variant décroissant

Q8. Il est possible de représenter les ensembles E et F par un unique tableau de booléens. Pourquoi ? Montrer qu'avec ce seul point de vue, le coût des extractions est au plus quadratique en l'ordre du graphe.

Car $\{E, F\}$ est une partition de S. Une extraction est linéaire

Q9. On note n l'ordre du graphe. On suppose une implantation naïve dans laquelle le graphe est représenté par une matrice d'adjacence. Formuler le temps de calcul en fonction de n.

$\Theta(n^2)$

Q10. Préciser les structures optimales pour représenter l'ensemble F, les arcs du graphes afin d'accélérer l'extraction de u et le parcours des voisins. Formuler le temps de calcul de Dijkstra correspondant en fonction du nombre de sommets n et du nombre d'arcs m. $O(n\log n + m)$

File de priorité $\Theta(\log n)$ liste d'adjacence

Q11. Modifier l'algorithme pour écrire une procédure `print(t)` qui, appelée en ligne 19, afficherait un chemin minimal d'origine s d'extrémité t.

Q12. Un circuit absorbant est un circuit de coût strictement négatif. Il n'est pas toujours possible de définir le chemin de coût minimal en présence d'un circuit absorbant. Pourquoi ?

Voir exemple Q13

Q13. Donner un exemple de graphe pondéré par une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$, sans circuit absorbant, et sur lequel l'algorithme de Dijkstra échoue.

```
BELLMAN-FORD( G, w, s )
d := [ inf , inf , ... , inf ]
d [s] := 0

repeter ordre(G) fois
    pour chaque arc uv
        relacher(u, v, w)

pour chaque arc uv
 si d[v] > d[u]+ w(u,v) alors
       retourner FAUX
retourner VRAI
```

L'algorithme de Bellman-Ford utilise la procédure de relâchement de l'algorithme de Dijkstra. Il donne les plus courts chemin d'origine unique à condition qu'aucun circuit absorbant ne soit accessible à partir de l'origine.

Q14. Estimer le temps de calcul de l'algorithme de Bellman-Ford en fonction du nombre de sommets n et du nombre d'arcs m.

O(mn)

Q15. On considère des graphes à n sommets et $m := n\sqrt{n}$ arcs. Une implantation de Bellman-Ford traite une intance à 1000 sommets en 1 seconde. Estimer le temps de calcul pour une instance d'ordre 10^6.

10^3^2.5 -> 116 jours

Edsger Dijkstra, 11/05/1930–6/08/2002, informaticien néerlandais, prix Turing 1972 (The Humble Programmer), renommé pour, entre bien d'autres choses, ses travaux sur les systèmes d'exploitation et le célèbre algorithme qui porte son nom.