

# Algorithmique des Graphes

## L3 informatique - Université de Toulon

5 janvier 2021

*Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie.*

### QUESTIONS DE COURS

**Q1.** Quel est le nombre d'arêtes maximal d'un graphe d'ordre  $n$  ? Dans ce cas, comment nomme-t-on le graphe ?

**Q2.** Pour une partie  $S$  de l'ensemble des entiers naturels, quelle est la définition de  $\text{mex}(S)$  ?

**Q3.** Quelle structure est utilisée pour l'implémentation de la gestion des ensembles disjoints avec l'heuristique de l'union par rang ? Préciser le temps de calcul de l'opération REPRESENTANT, en fonction du nombre  $n$  d'opérations SINGLETON.

**Q4.** Donner une définition de la notion de *tri topologique* du point de vue de la théorie algorithmique des graphes, en précisant bien le contexte et le temps de calcul. Citer un exemple d'application.

### COMPLEXITÉ DE KRUSKAL

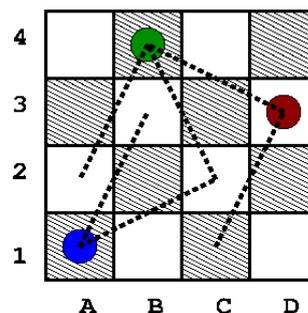
**Q5.** On considère l'algorithme de Kruskal procédant sur un graphe complet d'ordre  $n$ . Donner le temps de calcul en fonction  $n$  suivant l'algorithme de tri utilisé :

1. tri linéaire
2. tri par sélection
3. tri rapide

### CRÉATION ALGORITHME

**Q6.** Proposer une méthode efficace pour déterminer le plus petit entier ne figurant pas parmi les valeurs d'un tableau de  $n$  entiers. Préciser le temps de calcul.

### DÉPLACEMENT DU CAVALIER



**Q7.** On considère le graphe des déplacements d'un cavalier sur les 16 cases d'un échiquier  $4 \times 4$ . Par exemple, la case A1 est adjacente aux cases C2 et B3.

1. Le graphe est-il connexe ?
2. Possède-t-il un cycle de longueur impair ?
3. Le graphe est-il eulérien ?
4. Possède-t-il un cycle hamiltonien ?

5.  Le graphe est-il planaire ?

GRAPHE DE QUADRUPLETS

On note  $[0, t[$  l'intervalle des entiers naturels strictement inférieurs à  $t$ . On considère un quadruplet d'entiers  $p := (a, b, c, d)$ , paramètre auquel on associe le produit des intervalles :

$$\Omega = [0, a[ \times [0, b[ \times [0, c[ \times [0, d[$$

Notons que  $p \notin \Omega$ , et que le quadruplet  $(i, j, k, l)$  est dans  $\Omega$  si et seulement si

$$0 \leq i < a, \quad 0 \leq j < b; \quad 0 \leq k < c, \quad 0 \leq l < d.$$

On considère le graphe  $\Gamma$  dont  $\Omega$  est l'ensemble des sommets; en traçant un arc de  $r$  vers  $r'$  si et seulement si le quadruplet  $r'$  se déduit de  $r$  en diminuant strictement une seule des composantes de  $r$ . On utilisera la notation  $r \rightsquigarrow r'$ . Par exemple,  $(1, 2, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 2, 1, 4)$  mais  $(1, 2, 3, 4) \not\rightsquigarrow (1, 2, 1, 1)$  et  $(1, 2, 3, 4) \not\rightsquigarrow (1, 2, 3, 4)$ .

**Q8.** Préciser la nature du graphe  $\Gamma$  ?

**Q9.** Exprimer l'ordre de  $\Gamma$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .

**Q10.** Quel est le nombre d'arcs  $\Gamma$  ?

**Q11.** Quel est le degré du sommet  $(i, j, k, l)$  ?

PRÉLIMINAIRES ARITHMÉTIQUES

**Q12.** Effectuer la division euclidienne de l'entier naturel  $a$  par l'entier  $b > 0$  c'est déterminer l'unique couple d'entiers  $(q, r)$  vérifiant :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

1. Comment s'appelle les quantités  $q$  et  $r$  ?
2. En langage C, quels sont les opérateurs permettant de calculer  $q$  et  $r$  ?

**Q13.** Montrer que l'application :

$$(i, j, k, l) \mapsto \mathbf{N}(i, j, k, l) := labc + kab + ja + i$$

est une bijection de  $\Omega$  sur l'intervalle  $[0, abcd[$ .

**Q14.** Dans le cas,  $a = 5, b = 7, c = 9$  et  $d = 11$ . Quelle est l'image de  $(1, 2, 3, 4)$  par  $\mathbf{N}$ ? Quel est l'antécédant de 2021?

MISE EN OEUVRE

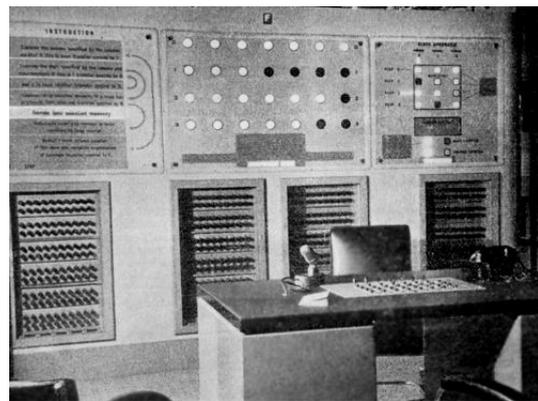
On définit les types :

```

1  typedef int quad[4]; // quadruplet
2  typedef struct {
3      int nbs; // ordre du graphe
4      char ** mat; // mat. adjacence
5  } graphe;
```

**Q15.** Coder `int itoq( int t, quad r, const quad p )` qui détermine la valeur de  $r$  de sorte que  $\mathbf{N}(r) = t$  pour le paramètre  $p$ . La valeur booléenne de retour renseigne sur la validité du résultat.

**Q16.** Coder `graphe nimrod( quad p )` une fonction qui retourne le graphe  $\Gamma$  correspondant au paramètre  $p$ .



*The NIMROD (1951) was designed exclusively to play the game of 'NIM'. This is a simple game, where you start with a number of piles of tokens — traditionally matches. Each player in turn takes one or more tokens from any one pile, and the game continues until the last token is taken from the last remaining pile. .*