

# Algorithmique des Graphes

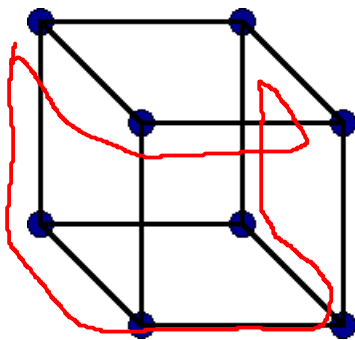
## L3 informatique

22 juin 2021

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie. Toutes les réponses doivent être justifiées en quelques mots ou par un dessin.

**Q 1.** Soit  $G(S, A)$  un graphe orienté. Pour  $x \in S$ , on note  $\Gamma(x)$  l'ensemble des sommets voisins de  $x$ . Compléter la formule :

$$\Gamma(x) = \{y \in S \mid xy \in A\}.$$



LE CUBE.

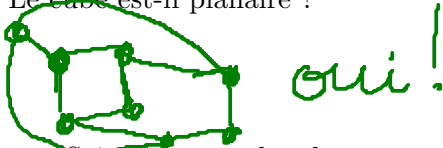
**Q 2.** Le cube est-il eulérien ?

*Non! car le nb de sommets impairs n'est pas nul.*

**Q 3.** Le cube est-il hamiltonien ?

*Oui. voir le dessin.*

**Q 4.** Le cube est-il planaire ?



*Oui!*

**Q 5.** Soit  $G$  un graphe obtenu par suppression d'une arête dans un arbre. Quel est le nombre composantes connexes de  $G$ ?

*2 la suppression de l'arête  $xy$  donne 2 composantes  $C(x)$  et  $C(y)$*

**Q 6.** On considère un graphe connexe pondéré de sorte que deux arêtes distinctes sont de poids distinct. Montrer que l'arbre couvrant minimal est unique.

*C'est une conséquence de l'algo de Kruskal*

**Q 7.** Dans quelle classe de complexité se situe le problème du graphe eulérien.

*la classe P*

**Q 8.** Expliquer en quelques phrases comment, et dans quel contexte, obtenir une 2-approximation du problème du voyageur de commerce.

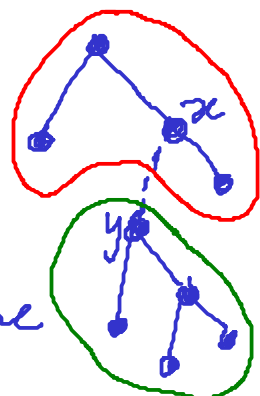
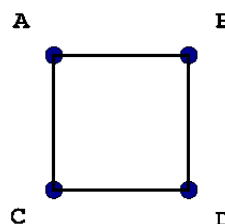
*On construit un ACM dont le parcours préfixe donne une 2-approx de PVC.*

**Q 9.** Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe d'ordre  $n$  composé de  $p$  composantes connexes?

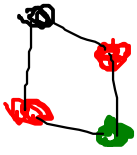
$$[m - p + 1 + 0]$$

**Q 10.** Quel est le nombre minimal d'arêtes d'un graphe d'ordre  $n$  composé de  $p$  composantes connexes?

$$m - p$$

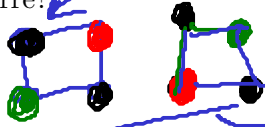


LE CARRÉ  $H_2$ .



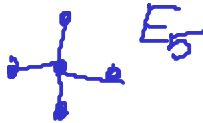
$3 \times 2 \times 2 = 12$

Q 11. Quel est le nombre de 3-colorations du carré?



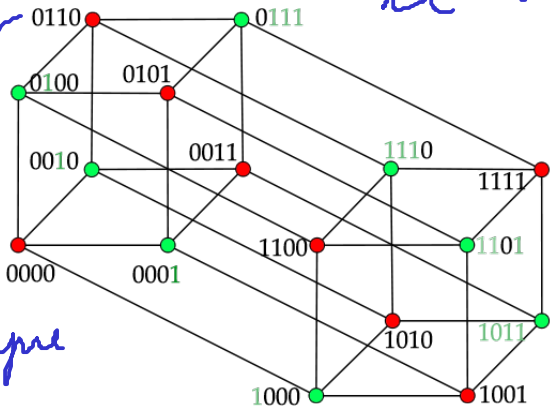
$3 \times 2 = 6$

Q 12. On considère le graphe étoile d'ordre  $n > 0$  composé d'un sommet dominant et de  $n - 1$  sommets de degré 1. Dessiner un graphe étoile d'ordre 5.



Q 13. Qu'est-ce que le polynôme chromatique d'un graphe? Quel est celui du graphe étoile d'ordre  $n > 0$ ?

le nb de  $t$ -coloration d'un graphe est donné par le polynôme chromatique



HYPERCUBE  $H_4$ .

L'hypercube de dimension  $n$  est le graphe  $H_n$  dont les sommets sont les  $n$ -uplets binaires. Deux sommets sont adjacents si et seulement s'il diffèrent d'un bit. L'hypercube de dimension 3 n'est rien d'autre que le cube !

Q 14. Préciser l'ordre et le nombre d'arête de l'hypercube de dimension  $n$ .

ordre:  $2^m$  arêtes:  $m 2^{m-1}$

Q 15. Quel est le nombre chromatique de  $H_n$ ?

des sommets de poids pairs ne sont pas connectés à ceux de poids impairs

Q 16. Montrer par une induction illustrée que  $H_n$  possède un cycle Hamiltonien.

```

1 typedef struct {
2     int ** adj; table des listes d'adjacences
3     int nbs; ordre du graphe
4 } graphe;
5
6 typedef struct _edt_ {
7     struct _edt_ *rep; chemin vers le
8     int rang; union par rang représentant
9     int card; taille de la classe
10    int num; même no du sommet
11 } enrdisjoint, *disjoint;
12
13 disjoint representant(disjoint x);
14 disjoint singleton(int v);
15 void reunion(disjoint x, disjoint y);
    
```

Q 17. Décrire les rôles des champs des deux structures du code ci-dessus.

Q 18. Utiliser les structures et fonctions ci-dessus pour coder la fonction `int cc(graphe g)` retournant le nombre de composantes connexes du graphe  $g$ .

VOIR Kruskal

Q 19. On suppose que la cardinalité d'un ensemble est maintenue à jour par la fonction `reunion` dans le champ `card`. Comment modifier la fonction `int cc( graphe g )` pour retourner la taille de la plus grande composante connexe du graphe  $g$ .

easy!