

Algorithmique des Graphes

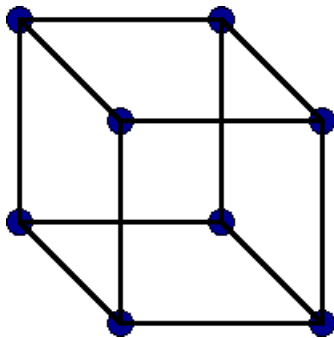
L3 informatique

22 juin 2021

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge. Il est par ailleurs inutile de recopier l'énoncé... La note finale tiendra compte de la présentation générale de la copie. Toutes les réponses doivent être justifiées en quelques mots ou par un dessin.

Q 1. Soit $G(S, A)$ un graphe orienté. Pour $x \in S$, on note $\Gamma(x)$ l'ensemble des sommets voisins de x . Compléter la formule :

$$\Gamma(x) = \{y \in S \mid \dots\}.$$



LE CUBE.

Q 2. Le cube est-il eulérien ?

Q 3. Le cube est-il hamiltonien ?

Q 4. Le cube est-il planaire ?

Q 5. Soit G un graphe obtenu par suppression d'une arête dans un arbre. Quel est le nombre composantes connexes de G ?

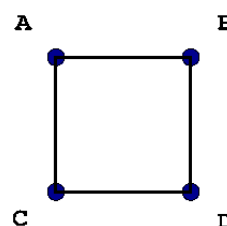
Q 6. On considère un graphe connexe pondéré de sorte que deux arêtes distinctes sont de poids distinct. Montrer que l'arbre couvrant minimal est unique.

Q 7. Dans quelle classe de complexité se situe le problème du graphe eulérien.

Q 8. Expliquer en quelques phrases comment, et dans quel contexte, obtenir une 2-approximation du problème du voyageur de commerce.

Q 9. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe d'ordre n composé de p composantes connexes?

Q 10. Quel est le nombre minimal d'arêtes d'un graphe d'ordre n composé de p composantes connexes?

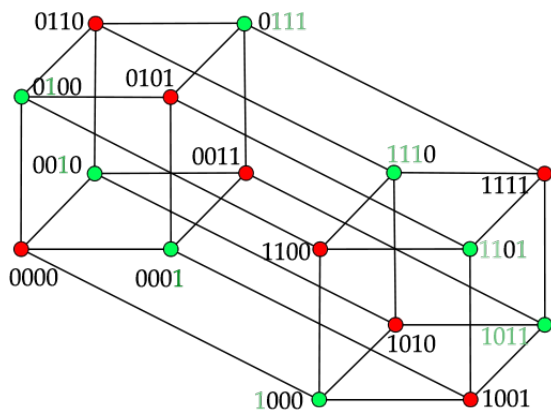


LE CARRÉ H_2 .

Q 11. Quel est le nombre de 3-colorations du carré?

Q 12. On considère le graphe étoile d'ordre $n > 0$ composé d'un sommet dominant et de $n - 1$ sommets de degré 1. Dessiner un graphe étoile d'ordre 5.

Q 13. Qu'est-ce que le polynôme chromatique d'un graphe? Quel est celui du graphe étoile d'ordre $n > 0$?



HYPERCUBE H_4 .

L'hypercube de dimension n est le graphe H_n dont les sommets sont les n -uplets binaires. Deux sommets sont adjacents si et seulement s'il diffèrent d'un bit. L'hypercube de dimension 3 n'est rien d'autre que le cube !

Q 14. Préciser l'ordre et le nombre d'arête de l'hypercube de dimension n .

Q 15. Quel est le nombre chromatique de H_n ?



Q 16. Montrer par une induction illustrée que H_n possède un cycle Hamiltonien.

```

1 typedef struct {
2     int ** adj;
3     int nbs;
4 } graphe;
5
6 typedef struct _edt_ {
7     struct _edt_ *rep;
8     int rang;
9     int card;
10    int num;
11 } enrdisjoint , *disjoint ;
12
13 disjoint representant(disjoint x);
14 disjoint singleton(int v);
15 void reunion(disjoint x, disjoint y);
    
```

Q 17. Décrire les rôles des champs des deux structures du code ci-dessus.

Q 18. Utiliser les structures et fonctions ci-dessus pour coder la fonction `int cc(graphe g)` retournant le nombre de composantes connexes du graphe g .

Q 19. On suppose que la cardinalité d'un ensemble est maintenue à jour par la fonction `reunion` dans le champ `card`. Comment modifier la fonction `int cc(graphe g)` pour retourner la taille de la plus grande composante connexe du graphe g .