

# Algorithmique des Graphes

## sujet spécimen

12 décembre 2018

*Le sujet spécimen est composé de questions modèles qui pour l'examen de janvier 2019. Je vous rappelle que ce dernier durera trois heures et qu'aucun document ne sera autorisé. Joyeux Noël et bonne préparation !*

**Q 1.** Donner la définition d'un graphe orienté. Quelles notions orientées correspondent aux notions de chaîne, cycle et arêtes.

**Q 2.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un circuit Eulérien dans un graphe orienté.

**Q 3.** Préciser le temps de calcul de l'algorithme de Kruskal en fonction du nombre d'arête  $m$  et du nombre de sommets  $n$ .

**Q 4.** Donner un exemple de graphe à 5 sommets pour lequel les algorithmes de Prim et Kruskal donne des arbres couvrants différents.

**Q 5.** Quelle est la classe de complexité du problème du voyageur de commerce ?

**Q 6.** Décrire en quelques lignes le principe de l'algorithme de Dijkstra.

**Q 7.** Quels sont les ingrédients principaux de l'algorithme de Christophides. Préciser les hypothèses à faire sur le graphe.

**Q 8.** Donner un exemple d'application du tri topologique.

**Q 9.** Écrire l'algorithme de parcours en profondeur incluant gestion des couleurs et date de traitement. Quelle est la nature de l'objet déterminer par un tel parcours.

**Q 10.** Soit  $n$  un entier. On considère le graphe d'ordre  $n$  dont les sommets sont les entiers inférieurs à  $n$  dont les arcs sont les couples  $uv$  pour lesquels  $j$  est un multiple de  $i$ .

- Montrer que le graphe est acyclique.
- Calculer la fonction de Grundy du graphe d'ordre 10.

**Q 11.** Lister les applications de backtracking abordées dans le cours.

**Q 12.** Rappeler la structure utilisée pour représenter les ensembles disjoints en langage C. Donner le code la fonction `representant` incluant la compression de chemins.

**Q 13.** Comment peut-on prouver que le problème du cycle Eulérien est plus facile que le problème du cycle Hamiltonien ? Préciser les complexités de ces problèmes.

**Q 14.** Rappeler la structure utilisée pour représenter une file de priorité d'éléments de type `obj` en langage C pour des clés entières. Donner le code de la fonction `obj extraire(int* cle)` qui extrait l'élément prioritaire.

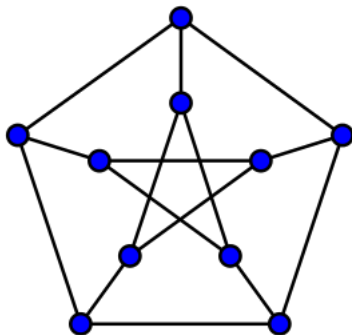
**Q 15.** Donner la définition d'une composante fortement connexe.

**Q 16.** Soit  $G$  un graphe orienté. Le graphe des composantes de  $G$ , noté  $\Gamma(G)$ , est le graphe dont les sommets sont les composantes fortement connexes de  $G$ . Les arcs  $XY$  de  $\Gamma(G)$  correspondent aux composantes reliées par un chemin dans  $G$  :

$$XY \in A(\Gamma(G)) \iff \exists x \in X \exists y \in Y x \rightsquigarrow y.$$

- On suppose  $G$  est planaire.  $\Gamma(G)$  est-il planaire ?
- Montrer que  $\Gamma(G)$  est acyclique.

**Q 17.** Écrire un algorithme de complexité cubique pour déterminer l'existence d'un triangle dans un graphe.



Graphe de Petersen.

**Q 18.** Le graphe de Petersen est-il Eulérien ?

**Q 19.** Le graphe de Petersen est-il Hamiltonien ?

**Q 20.** Le graphe de Petersen est-il planaire ?

**Q 21.** Le produit de deux graphes  $G$  et  $G'$ , généralement noté  $G \square G'$ , est le graphe dont les sommets sont tous les couples  $S(G) \times S(G')$  une arête reliant  $uu'$  à  $vv'$  si et seulement si  $u = v$  et  $u'v' \in A(G')$  ou bien  $uv \in A(G)$  et  $u' = v'$ .

- Quel est l'ordre de  $G \square G'$  ?
- Quel est le nombre d'arêtes ?
- Montrer que si  $G \square G'$  est connexe alors les graphes  $G$  et  $G'$  sont connexes.
- La réciproque est-elle vraie ?

**Q 22.**

On considère l'instance 2-SAT  $\Psi$  à 7 littéraux :

$$(a \vee c) \wedge (a \vee \bar{d}) \wedge (b \vee \bar{d}) \wedge (b \vee \bar{e}) \wedge (c \vee \bar{e})$$

$$\wedge (a \vee \bar{f}) \wedge (b \vee \bar{f}) \wedge (c \vee \bar{f}) \wedge (d \vee g) \wedge (e \vee g) \wedge (f \vee g).$$

A cette formule, on associe un graphe orienté dont les sommets sont les 10 littéraux constituant la formule  $\Phi$ . À chaque clause  $(p \vee q)$  de  $\Phi$  sont associés deux arcs  $\bar{p}q$  et  $\bar{q}p$ .

- Soient  $p$  et  $q$  deux littéraux. Quelles formules 2-SAT sont équivalentes à l'implication logique  $p \Rightarrow q$  ?
- Dessiner le graphe d'implication de  $\Psi$  en minimisant les croisements.
- Déterminer les composantes fortement connexes.
- Faire un tri topologique du graphe des composantes connexes.
- Déduire une solution de  $\Psi$  ?

À ce stade, vous avez peut-être deviné une réduction de 2-SAT à CFC ? Bravo !