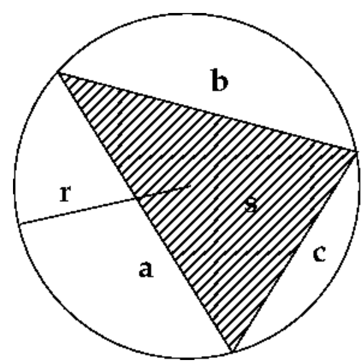
Une Jolie Petite Formule

Philippe Langevin

Printemps 2019

Un souvenir d'enfance me revient. Une page tombée à terre au pied de la grande table en chêne massif de la salle à manger. Règle à calcul dans les mains tu t'affaires sur un plan de la Cigalière et de la campagne des Ruscats environnante. Je la saisis, la calligraphie est parfaite. Un agencement hypnotique de lettres, symboles et chiffres. Mais de quoi s'agit-il ? Tu m'expliques que c'est un formulaire de trigonométrie qui résume quelques propriétés remarquables qui relient les mesures des cotés et des angles d'un triangle.

Il te suffit de quelques coups de crayons pour définir le sinus d'un angle, son cosinus, et la tangente. Les premières relations coulent de source. Bien évidement la somme des carrés du cosinus et du sinus est égale à 1, c'est le théorème de Pythagore. Le théorème de Thalès s'applique pour déterminer la tangente. Pour les relations que je sais aujourd'hui être de Simpson, c'est un peu plus compliqué alors on s'amuse à faire de l'algèbre pour déduire certaines formules à partir d'autres. Au bout du compte, après quelques jours passés sur l'encyclopédie Quillet, nous conviendrons que la plus jolie de toute est bien celle qui relie l'aire du triangle aux mesures des longueurs des côtés et du rayon du cercle circonscrit :

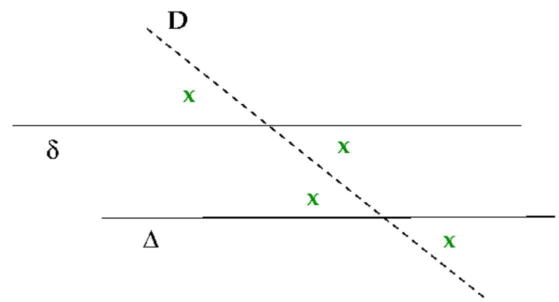


Un triangle de surface s, trois cotés de longueurs a, b, c dans son cercle circonscrit de rayon r.

$$abc = 4rs \tag{1}$$

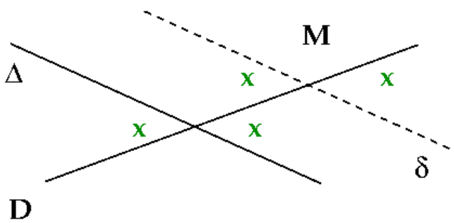
Depuis, je suis devenu mathématicien. Aujourd'hui, je réalise que nous n'en avons jamais fait la démonstration. Le temps est venu de terminer la leçon!

La démonstration s'obtient en trois étapes : *somme des angles* d'un triangle, la *relation des sinus* et enfin le lien entre *angle au centre* et angle inscrit. Piètre géomètre, je propose de partir d'une intuition pour ce que sont les angles formés par deux droites. Ils se manifestent par paire où les opposés n'en sont pas moins que égaux. Un point clef, si une droite D coupent deux parallèles δ et Δ alors il y a conservation des angles de droites, c'est le principe de superposition sans doute à l'origne même de la définition d'une mesure d'angle.

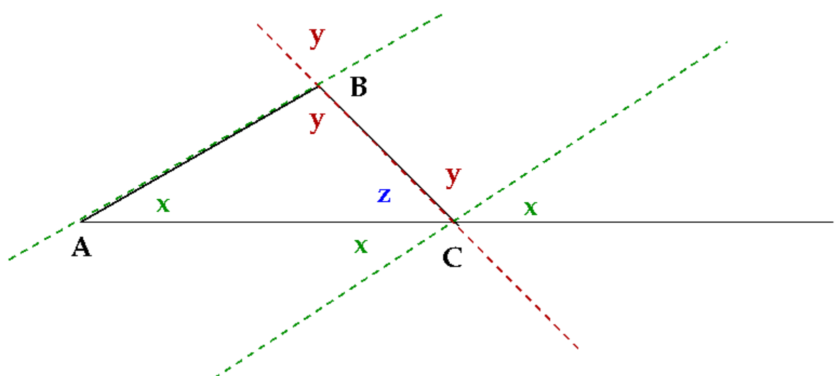


Angles de droites

Le cinquième postulat d'Euclide affirme qu'étant donné un point M extérieur à une droite Δ il existe une et unique droite δ passant par M et parallèle Δ. Ainsi, si D est une droite sécante à Δ passant par M alors elle est sécante à δ, une translation montre que les mesures des angles sont identiques.

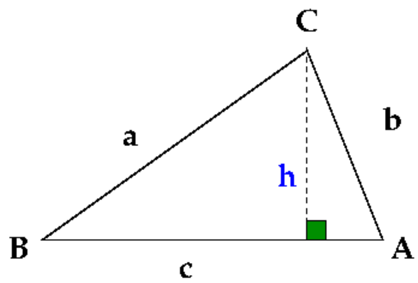


Le cinquième postulat d'Euclide



$x + y + z = \pi$

Ainsi, pour le premier point. D'un triangle ABC dont les angles sont x, y et z. La parallèle au coté AB passant par le point C fait apparaître les angles x et y autour de C de sorte que $x + y + z$ est soit la mesure du plat.



h la hauteur issu du sommet C

On commence par établir la *loi des sinus*, une autre formule qui nous plaisait bien ! On considère un triangle ABC, pour le sommet A la mesure de l'angle en A est notée $\widehat{A}$, la mesure du coté opposé est noté a et similairement pour les deux autres sommets. Rappelons qu'il s'agit d'établir les relations :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} \tag{2}$$

Pour établir une de ces trois égalités, on considère la hauteur h issue du sommet C. Par définition du sinus d'un angle :

$$\sin\widehat{A} = \frac{h}{b} \quad \text{et} \quad \sin\widehat{B} = \frac{h}{a}. \tag{3}$$

L'élimination de h donne l'égalité

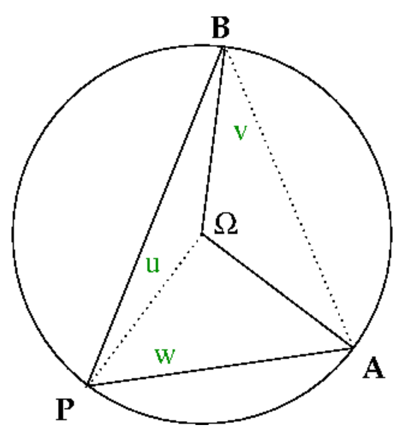
$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b}, \tag{4}$$

il suffit de recommencer avec deux autres points teminer.

Dans la figure de droite, A, B et P sont trois points non alignés, Ω le centre de l'unique cercle passant par ces trois points : le *cercle circonscrit* aux points A, B et P, à l'intersection des médiatrices des côtés du triangle. La mesure de l'angle au centre $\widehat{A\Omega B}$ est le double de celle de l'angle inscrit $\widehat{APB}$:

$$\widehat{A\Omega B} = 2.\widehat{APB}. \tag{5}$$

Les trois triangles $P\Omega B$, $P\Omega A$ et $A\Omega B$ sont isocèles. On focalise sur les angles limités par un segment en pointillé dont les mesures u, v et w sont indiquées sur le dessin. On se rappelle que la somme des mesures des angles internes d'un triangle est égale à celle de l'angle plat.



Angles au centre et inscrit.

$$\widehat{A\Omega B} + 2v = \pi$$
$$u + v = \widehat{APB}$$
$$\pi = 2u + 2v + 2w$$

Le résultat s'obtient en sommant les trois égalités.

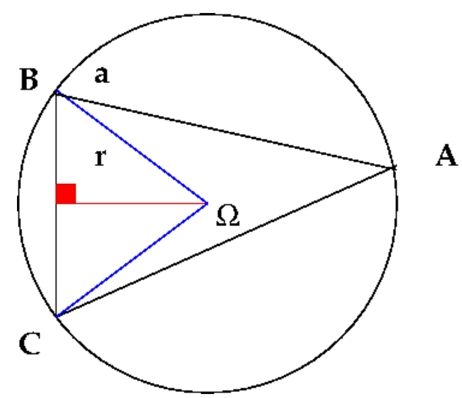
Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Tout d'abord, nous l'avons vu la surface du triangle par la base AB vaut

$$s = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$$

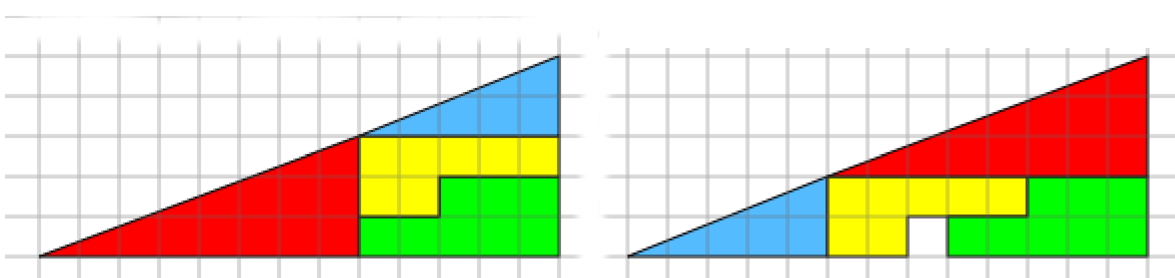
. On se rappelle que le centre du cercle circonscrit est à l'intersection des médiatrices des côtés du triangle. En particulier, le rayon du cercle circonscrit est lié au sinus de l'angle A par

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2r},$$

d'où la jolie petite formule.



En rouge, la médiatrice de BC.



Le paradoxe du carré manquant de Curry !

Une petite illustration, juste pour combler le vide...