

Algorithmique des Graphes

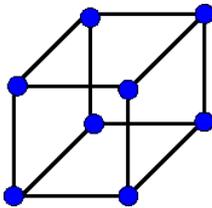
27 juin 2019

Soient m, n deux entiers strictement positifs. On dit qu'un graphe est de type $K_{m,n}$ quand l'ensemble des sommets peut-être partitionné en deux classes : une classe X de cardinal m , une classe Y de cardinal n de sorte que deux sommets sont adjacents si et seulement si il ne sont pas dans la même classe.

Q 1. Dessiner un graphe de type $K_{3,2}$.

Q 2. On considère un graphe de type $K_{m,n}$.

- Quel est le nombre de sommets ?
- Préciser le nombre d'arêtes.
- Le graphe est-il connexe ?
- Le graphe est-il 2-coloriable ?
- Quels sont les degrés possibles ?
- Contient-il des triangles ?



LE CUBE.

Q 3. Utiliser 1.e pour établir que le CUBE n'est pas de type $K_{m,n}$?

Q 4. Pour quelles valeurs de m et n , un graphe de type $K_{m,n}$ possède un cycle hamiltonien ?

Q 5. Pour quelles valeurs de m et n un graphe de type $K_{m,n}$ possède un chemin eulérien ?

Q 6. Rappeler la relation fondamentale

vérifiée par les nombres de sommets s , arêtes a et faces f d'un graphe planaire connexe. Dans un graphe planaire sans isthme la somme des cardinaux des faces vérifie :

$$\sum_{F \text{ face}} \text{card}(F) = 2a,$$

Expliquer cette relation.

Q 7. Un graphe $K_{3,2}$ est-il planaire ?

Q 8. Utiliser 6, pour montrer que dans un graphe planaire sans isthme dont les faces passent par au moins p sommets, le nombre d'arêtes a et le nombre de sommets s satisfont l'inégalité :

$$a \leq \frac{p}{p-2}(s-2)$$

Q 9. Argumenter avec 1.f et 8 pour justifier la non planarité de $K_{3,3}$.

Q 10. On suppose une pondération constante sur $K_{m,n}$. Quelle est la nature d'un arbre couvrant minimal ?

Q 11. Proposer un algorithme pour décider du

caractère $K_{m,n}$ d'un graphe. Préciser le temps de calcul.