Algorithmique des Graphes
L3 informatique

mardi 3 janvier $(2^1 + 0^1 + 2^1 + 3^1)(2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2)^2$

$7 \quad \times \quad 17^2 \quad = \quad 2023$:)

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge en répondant aux questions dans l'ordre de l'énoncé... La note tiendra compte de la présentation générale de la copie.

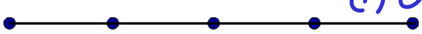
Q1. Soit G un graphe d'ordre n ayant m arêtes. On note $\Delta(G)$ le plus grand des degrés des sommets de G. Montrer que :

$$\frac{2m}{n} \leq \Delta(G).$$

$\sum_s \deg(s) = 2m$ $\Uparrow$ moyenne

Q2. Soit $t > 0$ un enier. Définir avec précision la notion de t-coloration d'un graphe G.

(X, U)

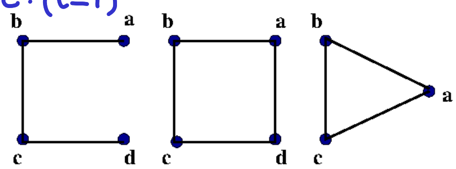


graphe fil d'ordre 5

Une application $f : X \to \{1, 2, \dots, t\}$ telque $f(i) = f(j) \Longrightarrow ij \notin U$

Q3. On note $f_n(t)$ le nombre de t-colorations du graphe fil de longueur n. Que vaut $f_n(t)$?

$f_m(t) = t.(t-1)^{m-1}$



graphe E **graphe G** **graphe V**

Q4. Observer les graphes E, G et V de la figure ci-dessus. Lesquelles de ces affirmations sont correctes?

(a) Toute coloration de G est une coloration de E. oui

(b) Toute coloration de E est une coloration de G. non

(c) Toute coloration g de V se prolonge d'une et une seule façon en une coloration de G telle que $g(a) = g(d)$. non

(d) Toute coloration g de V se prolonge d'une et une seule façon en une coloration de $\cancel{V}$ E telle que $g(a) = g(d)$. oui

(e) Le nombre de t-colorations de E est égal à la somme des t-colorations de G et V.

(a) et (d) $\Longrightarrow$ oui

Déduire que le nombre de t-colorations de G vaut : $t(t-1)(t^2 - 3t + 3) = f_G(t)$

$t(t-1)^3 = f_G(t) + t(t-1)(t-2)$

Q5. On note $L(G)$ le graphe adjoint d'un graphe connexe G dont tous les degrés sont impairs.

Un chemin de x vers y donne un chemin de xx' vers yy'

(a) G est-il eulérien ? Non

(b) $L(G)$ est-il connexe. oui

$\deg(xx') = \deg(x) + \deg(x') - 2$

(c) Préciser la parité des degrés dans $L(G)$? pair

(d) $L(G)$ est-il eulérien ? oui

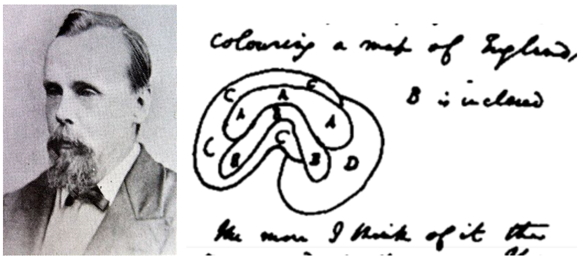
```
Eulerien( s:sommet, G:graphe )

  P ← promenade( s, G )
  pour chaque sommet x  de P
     si degre( x ) > 0 alors
        Eulerien(x, G)
     sinon
        imprimer( x )
```

Listing 1: construction d'un parcours eulérien

Q6. Observer l'algorithme `eulerien(s,G)`. Que faut-il supposer sur s et G pour obtenir la construction d'un parcours semi-eulérien?

G connexe et deux sommets de degré impair dont s



Francis Guthrie à l'origine du théorème des 4 couleurs (1852).

Q7. Pour une partie X incluse dans l'ensemble des entiers naturels, on note $\text{mex}(X)$ le plus petit entier naturel qui n'est pas dans X.

(a) Que vaut $\text{mex}(\emptyset)$? 0

(b) Comparer $\text{mex}(X)$ au cardinal de X. $\text{mex}(X) \leq |X|$

(c) Préciser le cas d'égalité.

$X = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

```
COLORIAGE( G : graphe )
pour chaque sommet s de G
  clr[ s ] = ordre(G)
pour chaque sommet s de G
      X ← {}
      pour chaque voisin t de s
           ajouter clr[t] dans X
      clr[s] ← mex( X )
```

Listing 2: coloriage

Q8. Expliquer pourquoi l'algorithme `coloriage( G )` détermine bien une coloration du graphe G. Chaque sommet est bien colorié avec une couleur différente de celle de ses voisins.

Q9. Préciser le nombre de couleurs en fonction de $\Delta(G)$.

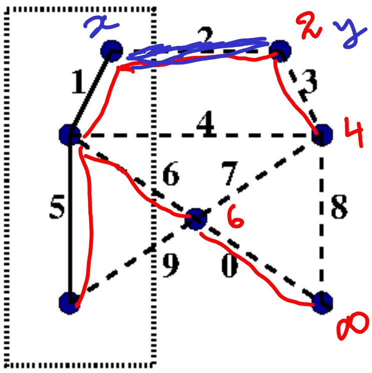
il est $\leq \Delta(G) + 1$

Q10. Coder `int mex( int t[] , int n)` qui prend en argument un tableau de taille n et qui retourne le plus petit entier naturel qui n'est pas une valeur le tableau t.

Q11. Implanter l'algorithme de coloriage en langage C en privilégiant une représentation par liste d'adjacence.

```
void coloriage(graphe g )
{ int X[g.nbs] , m,s;
  liste aux;
  for(s=0; s < g.nbs; s++)
     g.clr[s]= g.nbs;
  for( s=0; s< g.nbs; s++ ){
     m=0;
     aux = g.adj[s];
     while(aux) {
        X[m++] = g.clr[aux->num];
        aux = aux->svt;
     }
     g.clr[s] = mex(X,m)
  }
}
```

```
int mex( int t, int m )
{ char *r=calloc( m+1, sizeof(char));
  int i;
  for( i=0; i < m; i++ )      Q7 (b,c)
     if( t[i] < m )  r[t[i]]= 1;
  i = 0
  while ( r[i] ) i++
  free(r);
  return i;
}
```



sous arbre T

Soit $G(X, U)$ un graphe connexe pondéré par w. On suppose que $T(Y, V)$ est un sous arbre d'un arbre couvrant minimal de G. Pour chaque sommet $t \in X \setminus Y$, on pose $\delta(t) = \infty$ si t n'est pas adjacent à un sommet de Y et sinon

$$\delta(t) = \min_{y \in Y} w(ty),$$

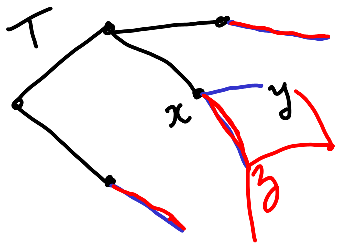
On considère un sommet x de $X \setminus Y$ qui minimise δ, on note y le sommet de Y tel que $\delta(x) = w(xy)$ et $T^\dagger$ le graphe de sommets $Y \cup \{x\}$ et d'arêtes $V \cup \{xy\}$.

Q12. Il s'agit d'illustrer les points décrits dans le cas du graphe ci-dessus.

1. Marquer les valeurs de δ. rouge
2. Colorier en rouge un ACM passant par T.
3. Quel est son coût ? 17
4. Colorier une arête xy en bleu.

Q13. Il s'agit d'étudier les points décrits dans un cadre général.

1. Il existe $t \in X \setminus Y$ tel que $\delta(t) \neq \infty$. Pourquoi ? connexe
2. Montrer que $T^\dagger$ est sous-arbre de G. partiel, connexe, acyclique !!
3. Démontrer que $T^\dagger$ est sous-arbre d'un ACM de G.



un ACM passant par T et xz est de moins cout que celui passant par T et xy.