

Algorithmique des Graphes

L3 informatique

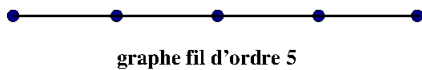
mardi 3 janvier $(2^1 + 0^1 + 2^1 + 3^1)(2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2)^2$

Vous êtes invités à remettre une copie claire, concise, sans rature ni surcharge en répondant aux questions dans l'ordre de l'énoncé... La note tiendra compte de la présentation générale de la copie.

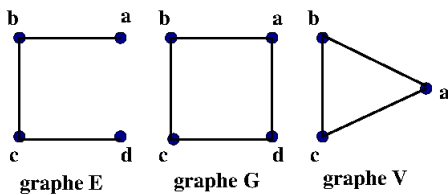
Q1. Soit G un graphe d'ordre n ayant m arêtes. On note $\Delta(G)$ le plus grand des degrés des sommets de G . Montrer que :

$$\frac{2m}{n} \leq \Delta(G).$$

Q2. Soit $t > 0$ un entier. Définir avec précision la notion de t -coloration d'un graphe G .



Q3. On note $f_n(t)$ le nombre de t -colorations du graphe fil de longueur n . Que vaut $f_n(t)$?



Q4. Observer les graphes E , G et V de la figure ci-dessus. Lesquelles de ces affirmations sont correctes?

- (a) Toute coloration de G est une coloration de E .
- (b) Toute coloration de E est une coloration de G .

- (c) Toute coloration g de V se prolonge d'une et une seule façon en une coloration de G telle que $g(a) = g(d)$.
- (d) Toute coloration g de V se prolonge d'une et une seule façon en une coloration de E telle que $g(a) = g(d)$.
- (e) Le nombre de t -colorations de E est égal à la somme des t -colorations de G et V .



Déduire que le nombre de t -colorations de G vaut : $t(t-1)(t^2 - 3t + 3)$.

Q5. On note $L(G)$ le graphe adjoint d'un graphe connexe G dont tous les degrés sont impairs.

- (a) G est-il eulérien ?
- (b) $L(G)$ est-il connexe.
- (c) Préciser la parité des degrés dans $L(G)$?
- (d) $L(G)$ est-il eulérien ?

```

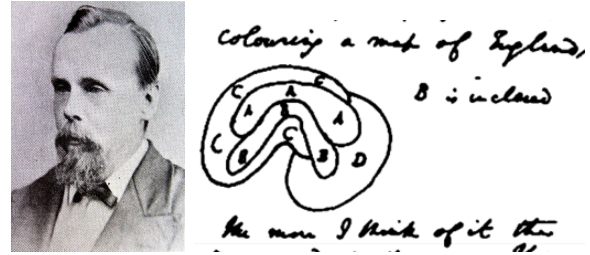
1 Eulerien( s:sommet, G:graphe )
2
3   P ← promenade( s, G )
4   pour chaque sommet x de P
5       si degre( x ) > 0 alors
6           Eulerien(x, G)
7       sinon
8           imprimer( x )
```

Listing 1: construction d'un parcours eulérien

Q6. Observer l'algorithme `eulerien(s,G)`. Que faut-il supposer sur s et G pour obtenir la construction d'un parcours semi-eulérien?

Q7. Pour une partie X incluse dans l'ensemble des entiers naturels, on note $\text{mex}(X)$ le plus petit entier naturel qui n'est pas dans X .

- (a) Que vaut $\text{mex}(\emptyset)$?
- (b) Comparer $\text{mex}(X)$ au cardinal de X .
- (c) Préciser le cas d'égalité.



Francis Guthrie à l'origine du théorème des 4 couleurs (1852).

```

1 COLORIAGE( G : graphe )
2 pour chaque sommet s de G
3   clr[ s ] = ordre(G)
4 pour chaque sommet s de G
5   X ← {}
6   pour chaque voisin t de s
7     ajouter clr[ t ] dans X
8   clr[ s ] ← mex( X )

```

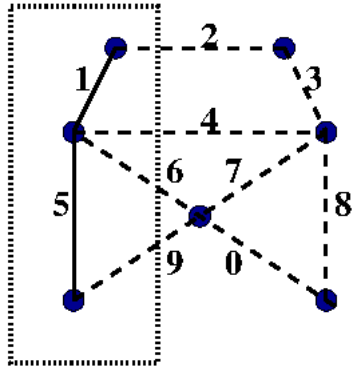
Listing 2: coloriage

Q8. Expliquer pourquoi l'algorithme `coloriage(G)` détermine bien une coloration du graphe G .

Q9. Préciser le nombre de couleurs en fonction de $\Delta(G)$.

Q10. Coder `int mex(int t[] , int n)` qui prend en argument un tableau de taille n et qui retourne le plus petit entier naturel qui n'est pas une valeur le tableau t .

Q11. Implanter l'algorithme de coloriage en langage C en privilégiant une représentation par liste d'adjacence.



sous arbre T


Soit $G(X, U)$ un graphe connexe pondéré par w . On suppose que $T(Y, V)$ est un sous arbre d'un arbre couvrant minimal de G . Pour chaque sommet $t \in X \setminus Y$, on pose $\delta(t) = \infty$ si t n'est pas adjacent à un sommet de Y et sinon

$$\delta(t) = \min_{y \in Y} w(ty),$$

On considère un sommet x de $X \setminus Y$ qui minimise δ , on note y le sommet de Y tel que $\delta(x) = w(xy)$ et T^\dagger le graphe de sommets $Y \cup \{x\}$ et d'arêtes $V \cup \{xy\}$.

Q12. Il s'agit d'illustrer les points décrits dans le cas du graphe ci-dessus.

1. Marquer les valeurs de δ .
2. Colorier en rouge un ACM passant par T .
3. Quel est son coût ?
4. Colorier une arête xy en bleu.

Q13.  Il s'agit d'étudier les points décrits dans un cadre général.

1. Il existe $t \in X \setminus Y$ tel que $\delta(t) \neq \infty$. Pourquoi ?
2. Montrer que T^\dagger est sous-arbre de G .
3. Démontrer que T^\dagger est sous-arbre d'un ACM de G .