

## trajectoire IMATH 2024-29

L'institut mathématiques de Toulon résulte de la fusion entre le laboratoire d'analyse appliquée et méthode numérique (ANAM), et le groupe de recherche en informatique et mathématique (GRIM). Depuis cette fusion opérée en 2006, les effectifs du laboratoire sont restés stables, une vingtaine de permanents regroupés autour de trois thématiques :

1. Analyse Appliquée (AA) couvrant le calcul des variations, spécialement les questions relevant du transport optimal et de l'analyse des équations de la mécanique des milieux continus.
2. Informatique et Algèbre Appliquée (IAA) couvrent un continuum d'activités allant de la géométrie algébrique à l'arithmétique des ordinateurs, avec des applications en cryptographie et codage.
3. Modélisation Numérique (MN) couvre enfin la modélisation mathématique, l'analyse numérique et le calcul scientifique et intensif, spécialement en hydrodynamique et mécanique des fluides complexes.

Le profil d'activité du laboratoire est fortement ancré sur la publication scientifique, l'encadrement de la recherche et dans une moindre mesure sur la dissémination de la recherche. Cette activité est bien structurée autour de ses axes scientifiques, et qualifiée de très bon niveau international sur ses trois domaines de recherche par la dernière expertise du laboratoire.

Le rapport très positif de l'HCERES souligne aussi une activité remarquable d'encadrement doctoral. La diversification des sources de financements des contrats doctoraux doit permettre de maintenir un bon niveau d'encadrement qui favorisera l'augmentation potentiel HDR de l'IMATH, quatre habilitations étant envisageables.

Les mathématiques de l'UFR sciences et techniques et en particulier de notre laboratoire vont devoir faire face aux prochains départs en retraite. Le laboratoire souhaite s'engager dans la réflexion avec sa tutelle pour proposer des projets de recrutements compatibles avec ses impératifs de recherche et les impératifs pédagogiques de l'UFR des sciences et techniques. Du fait des pyramides des

âges, le thème AA est le plus exposé. La thématique jouit d'une excellente réputation internationale, d'une très bonne dynamique sur des sujets actuels, mais souffre d'un manque de recrutement qui pourrait être préjudiciable dans la durée. L'absence de recrutement d'un chercheur pour cette équipe est perçue comme une véritable menace pour le développement et l'équilibre du laboratoire.

Dans ce contexte, cette priorité de recrutement affichée, le laboratoire envisage de poursuivre l'ensemble de ses activités scientifiques, tout en définissant ou redessinant quelques objectifs:

- Les thèmes IAA et MN partagent un fort intérêt pour le calcul. Ils contribueront à redynamiser le pôle calcul en collaboration avec les chercheurs des autres laboratoires de l'université. Il s'agit de (re)structurer une activité d'animation autour du calcul et plus largement du logiciel scientifique pour former les doctorants et les chercheurs, et de contribuer à une meilleure valorisation de la production logicielle.
- L'équipe AA souhaite élaborer un programme de recherche de longue durée, traitant des problèmes théoriques divers d'analyse non-linéaire, de calcul des variations, et d'analyse géométrique, domaines qui sont interconnectés et peuvent prendre pour axe commun des problématiques de la mécanique des solides. Dans une première étape, le recrutement d'un chercheur pour le thème AA est une priorité du laboratoire pour l'initiation dudit programme. Ce programme suscitera aussi des investigations dans divers domaines du numérique ou de l'IA. Le laboratoire envisage d'initier un pont pour des collaborations plus étroites en interne entre les deux thèmes d'analyse du laboratoire.
- En marge du projet CALAME initié par MN, les chercheurs de l'IMATH souhaitent animer un groupe de travail pour sonder l'intérêt de l'intelligence artificielle et de l'apprentissage dans les trois thèmes de l'équipe.
- Le laboratoire doit amplifier ses relations avec la FRUMAM. La fédération est une source alternative de financements dans le domaine des mathématiques et de l'informatique : conférences, postes invités, délégations, stages de master, séminaires, collaborations régionales, en particulier avec le laboratoire I2M.
- Le laboratoire appuie le projet CALAME du thème MN pour renforcer les relations industrielles dans le domaine de la mer, en lien avec la filière MOCA de l'école Seatech, moteur de relations interdisciplinaires à l'échelle de l'université de Toulon.

L'ensemble des projets proposés s'inscrivent dans une dynamique collaborative qui vient compléter une très bonne dynamique de production scientifique que nous souhaitons maintenir. Nous gardons à l'esprit que les membres du laboratoire sont fortement impliqués dans l'ensemble des activités du métier d'enseignant

chercheur. Nous sollicitons notre tutelle pour nous aider à minimiser les surcharges liées aux sous encadrements pédagogiques qui ne manqueraient pas de peser trop lourdement sur ces projets.

## **Projet de recherche de la thématique Analyse Appliquée (AA)**

L'équipe entend poursuivre et développer ses propres points forts tout en préservant ses excellentes collaborations internationales.

### **1. Projet Optimisation sur les mesures et Transport Optimal (OT)**

**Transport optimal multimarginal** : les travaux effectués en collaboration avec l'école De Giorgi (Pise, Florence) vont être poursuivis, notamment les études asymptotiques en théorie DFT pour plusieurs modèles de chimie quantique (propriété de dissociation et identification des énergies limites). Des calculs numériques en collaboration avec l'équipe MN (C. Galusinski), testés actuellement sur le modèle de Thomas-Fermi, seront mis à contribution pour illustrer des phénomènes d'ionisation. En parallèle divers problèmes liés au passage à la limite quand le nombre de particules tend vers l'infini (mean-field theory) vont être développés à l'aide d'une nouvelle approche introduite dans le preprint récent U.Bindini-G Bouchitté (<https://hal-univ-tln.archives-ouvertes.fr/hal-03814479v1>).

**Transport optimal non linéaire** : le travail Alibert-Bouchitté-Champion (ABC, paru dans EJAM2018) servira en partie de base au dépôt d'une ANR (Projet SOCOT déposé pour la campagne à venir) pilotée par Nicolas Juillet (Université de Mulhouse) sur le thème "Ordres stochastiques et transport sous contraintes". Les problèmes de transport optimal non linéaires sont d'une grande richesse, tant pour leurs applications que pour les problèmes ouverts induits. Outre les questions d'existence et de régularité de potentiels pour ces problèmes, nous étudierons les nouvelles notions de barycentres de Wasserstein associées à ces transports. De plus, dans la continuation du travail ABC, nous avons construit une version dynamique du problème de transport avec contrainte du type martingale en partant d'une dynamique du second ordre où la matrice de diffusion est une variable de contrôle. Faute de financement pour un encadrement de thèse sur ce sujet, ce projet est resté en standby mais va être repris dans le cadre du projet d'ANR. L'approche contrôle optimal est étudiée actuellement en collaboration avec B. Bulany postdoctorant à Louvain.

**Applications à l'optimisation paramétrique** : le travail récent développé en collaboration avec Bravo et Cominetti (Univ. A. Ibanez, Chili) permet d'obtenir des

bornes optimales pour caractériser la convergence de méthodes de point fixe de type Krasnoselskii-Mann. Ce travail ouvre la voie à l'optimisation paramétrique de ces méthodes : le travail en cours consiste à optimiser le choix des paramètres de ces méthodes afin de minimiser le nombre d'itérations nécessaires pour assurer un niveau de précision donné. L'application du transport optimal à ce domaine est très récente et reste à approfondir et à généraliser.

**Applications en optimum design** : l'idée de relier la distribution optimale d'un matériau à la distance de Monge-Kantorovich s'est révélée fructueuse (travaux initiés en 97). Dans l'article récent (G. Bouchitté, K. Bolbotowski, ARMA 2022, <https://arxiv.org/abs/2104.04894>), ce principe a été étendu pour une classe de problèmes de design optimal en mécanique pour lesquels la métrique régissant le problème de transport de Monge doit elle-même être optimisée. Diverses questions liées à ces métriques optimales sont encore ouvertes. Par ailleurs, l'étude d'un problème de maximisation d'une forme linéaire avec une contrainte ponctuelle sur la Hessienne a révélé une équivalence nouvelle avec un problème de transport à trois marginales (travaux en cours). Une conséquence en mécanique est l'obtention de bornes pour le support de la mesure de contrainte associée à un grillage optimal soumis à un chargement donné. Un défi pour les années à venir serait d'obtenir un résultat du même type dans le cas vectoriel du problème de Michell.

## **2. Projet : Etude asymptotique de structures mécaniques à comportement non standard.**

**Homogénéisation à fort contraste** : l'équipe a une forte expérience dans l'étude asymptotique de problèmes variationnels issus de la mécanique pour lesquels l'énergie limite est d'une nature différente des énergies initiales (apparition de "killing term", "non-localité", "modèle de Timoshenko", ...) en particulier elle est à l'origine des rares résultats d'homogénéisation faisant apparaître des termes de "second-gradient". Une ANR et le recrutement d'un post-doc ont eu lieu sur ce sujet au cours du quadriennal actuel (cf. [Predictive strain-gradient homogenization of a pantographic material with compliant junctions](#) B Durand, A Lebé, P Seppecher, K Sab Journal of the Mechanics and Physics of Solids 160). L'équipe entend poursuivre dans ce domaine : un résultat d'homogénéisation conduisant à un modèle de "stress-gradient" est sur le point d'être démontré. Des problèmes de compacité des matériaux laminés avec des couches presque dégénérées restent à régler, avec en perspective de nombreux problèmes mathématiques connexes.

**Structures réticulées** : les structures "pantographiques" étudiées en collaboration avec le centre inter-national MEMOCS (L'Aquila, Italie) (cf. [Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological](#)

[challenges](#)) posent encore de nombreuses questions, sur le comportement non linéaire de structures non droites, sur la possibilité de concevoir des structures souples en flexion mais de comportement de second-gradient en extension, sur la conception de structures au comportement de troisième gradient... De plus la généralisation de ce travail aux structures de type Origami est un défi.

**Comportement des structures résistantes uniquement en compression :** Récemment (cf. [Limit analysis of strut nets](#) A Amendola, A Fortunato, F Fraternali, O Mattei, GW Milton, P Seppecher to appear in Mathematics and Mechanics of Solids), une méthode particulièrement simple de vérification de la stabilité des constructions en maçonnerie a été développée. Elle est pour l'instant applicable aux structures 2D. L'extension au cas tri-dimensionnel est prévue.

**Froissement du papier :** Lors de la dérivation de modèles asymptotiques, une hiérarchie de modèles élastiques de membranes et de plaques pour des régimes d'énergie différents a été rigoureusement déduite du modèle standard d'élasticité non-linéaire tri-dimensionnelle par un travail collectif. Nous souhaitons poursuivre notre participation à ce travail (cf. par exemple M. Lewicka, L. Mahadevan and M.R. Pakzad, [The Monge-Ampère constraint: matching of isometries, density and regularity, and elastic theories of shallow shells](#), Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, Vol 34, Issue 1, 45--67, (2017)) en attaquant des variantes de ce problème qui peuvent être formulées en partant de géométries incompatibles avec l'espace euclidien ambiant ou bien en tenant compte de contraintes de compliance. Quelques résultats récents sont obtenus pour de telles variantes mais, concernant par exemple la détermination du modèle énergétique décrivant le froissement du papier, le problème reste ouvert : à ce jour, le régime d'énergie est conjecturé mais aucune Gamma-limite n'a pu être identifiée.

**Rigidité vs. flexibilité, la conjecture de Gromov :** Gromov propose un seuil de régularité de type Hölder pour la dichotomie de la rigidité et flexibilité des immersions isométriques de la sphère. Ce problème est aussi lié aux problèmes mentionnés sur la compréhension des modèles de plaques non-euclidiennes et du froissement du papier. L'analyse des solutions des équations de Gauss et de Codazzi-Mainardi des immersions dans les régimes de régularité pour lesquels cette conjecture est formulée devient nécessaire. La compréhension des formulations faibles de ces équations non-linéaires est fondamentale pour avancer sur ce problème. Outre l'utilisation de techniques directement géométriques, il est nécessaire d'utiliser des arguments de théorie géométrique de la mesure, d'analyse non-linéaire des distributions (cf. preprint R. Pakzad <https://arxiv.org/abs/2206.09224>), de la théorie des structures de régularité de Hairer et des méthodes d'intégration convexe.

**Déterminant distributionnel du jacobien** : Des acteurs majeurs dans tous ces problèmes sont le déterminant distributionnel du jacobien ainsi que des notions voisines plus géométriques, comme les formes différentielles associées aux applications entre variétés qui détectent les singularités topologiques ou comme les mineurs du jacobien qui apparaissent dans les fonctionnelles de surface et de volume ou bien de courbure dans le contexte de l'élasticité non-linéaire. Une réponse positive à certaines conjectures sur les formules de la co-aire ou du déterminant jacobien des compositions ouvrirait la voie vers la solution d'autres problèmes ouverts en élasticité, analyse géométrique et géométrie différentielle.

## **Projet de recherche de la thématique Modélisation Numérique (MN)**

Le projet de recherche concerne de manière générale les axes suivants : la thermo-hydrodynamique, l'hydro-géo-dynamique et les biomathématiques.

Nous souhaitons poursuivre nos travaux de recherche en modélisation, analyse mathématique et numérique, construction de méthodes numériques et développement de codes autour de ces axes développés ci-après.

- Depuis de nombreuses années l'hydrodynamique est une thématique de recherche reconnue de l'équipe qui a permis de nombreuses thèses et collaborations industrielles et académiques, ainsi que le développement d'un code de calcul volumes finis performant (parallèle, AMR, 3D, ...). De même, en collaboration avec l'INRAE, la modélisation de l'érosion est un thème de recherche reconnu de l'équipe. Depuis la thèse de J.B. Clément (2017-2021) sur les écoulements en milieux poreux, nous avons élargi notre expertise sur des modèles implicites par éléments finis discontinus. Nous souhaitons à présent construire des méthodes GD pour nos modèles hyperboliques (dans le cadre de la thèse de C. Poussel). Cette méthodologie devrait nous permettre de proposer de nouveaux couplages de modèles et le développement d'un code labo que nous souhaitons faire valoriser en collaborant en sus avec les collectivités locales. De plus, dans ce contexte, une nouvelle thèse couplant modèle bi-fluide, Saint-Venant et érosion devrait débiter à la fin de l'année 2022 en collaboration étroite avec l'INRAE. En parallèle, nous poursuivons la construction de modèles hydrostatiques et non-hydrostatiques pour les problèmes concernés.
- Nous poursuivons l'étude de modèles et de méthodes numériques pour la simulation d'écoulement multiphasiques décrivant les transferts de chaleur dans des échangeurs de chaleur. Nous nous intéressons à la fois à la modélisation, à l'analyse de ces modèles ainsi qu'au développement de schémas numériques spécifiques et performants. Ces travaux ont été soutenus et financés par trois projets Needs rassemblant une large communauté de scientifiques (une vingtaine de chercheurs universitaires et industriels experts en mathématiques appliquées, simulation numérique,

mécanique, thermohydraulique). Cette année, nous avons répondu à deux nouvelles demandes : une candidature à l'AAP exploratoire Needs a été proposée le 26 octobre 2022 et une candidature à l'AAP « Les Défis Mathématiques 2030 » a été proposée le 1 octobre 2022. Cette dernière contient une demande de financement de thèse pour notre équipe.

- Récemment, par le biais d'une collaboration avec les Hospices Civils de Lyon, nous avons démarré la thèse de Y. Mannes sur les écoulements sanguins dont l'objectif est de fournir un outil de prédiction et de validation dans l'étude de certaines pathologies ou pour la prise de décisions en amont d'actes chirurgicaux tel que la pose de stent, par exemple. Dans ce contexte, l'objectif est de proposer la réduction de modèle 3D vers du 1d qui tient compte des propriétés biologiques et mécaniques de la paroi de l'artère, sa courbure, sa torsion, etc. La propagation de la déformation dans le modèle 1D pourra être intégrée à des modèles d'écoulement tridimensionnel dont la géométrie est reconstruite depuis des données d'imagerie médicale et permettre ainsi des comparaisons 3D/1D. Enfin, tirant profit de l'expérience acquise, nous souhaitons développer un logiciel basé sur ces méthodes. Nous souhaitons ainsi poursuivre cette collaboration avec l'Hospice Civils de Lyon et l'étendre à des laboratoires médicaux afin de valoriser le code.
- Nous poursuivons l'activité de modélisation, de développement et de portage de méthodes numériques portant sur l'étude de la propagation d'un feu en milieu naturel et à l'interface forêt-habitat. Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet GOLIAT CPER 2020-2023 (lutte incendie et aménagement du territoire), porté par l'Université de Corse, dans lequel nous intervenons en tant que partenaire sur les volets développement d'outils d'aide à la décision et modélisation mathématique. Une suite de ce projet, financée par la DFCI / Région Corse, est prévue à partir de fin 2023. A partir de novembre 2022, nous renforçons nos collaborations avec deux universités australiennes (Victoria University à Melbourne, UNSW à Canberra) en co-encadrant deux thèses sur le thème feu (Mécanique des Fluides Numérique, Calcul Haute Performance et Intelligence Artificielle). Par ailleurs, en notre qualité de responsable scientifique du dépôt de déclaration d'invention à la SATT Sud-Est inhérent à la valorisation de l'outil de simulation numérique (« FireStar-Tool »), il est envisagé de bénéficier de financements de la SATT Sud-Est (en pré-maturation et/ou maturation) permettant de procéder à une refonte et un portage du code de calcul (sur architectures vectorielles et/ou hybrides) ainsi qu'à l'ajout de nouvelles fonctionnalités.
- Nous nous intéressons également à l'étude mathématique, mais également à la modélisation et aux développements de méthodes numériques, de certains problèmes liés à la dynamique de l'atmosphère. Il est prévu le démarrage de deux thèses en cotutelle avec l'Université de Ziguinchor, Sénégal fin 2022. L'objectif de ces travaux de thèse est d'étendre des travaux d'existence et d'unicité et de construire de nouveaux modèles mathématiques compressibles multi-couches pour la prévision de phénomènes climatiques rares. Enfin, nous souhaitons développer des codes numériques basés sur

des méthodes GD qui seront amenés à être couplés aux codes laboratoires existants pour la prévision de tsunami, d'inondation, de feux, etc. Nous souhaitons également profiter, par le biais de cette collaboration, intervenir dans les formations à l'Université de Zinguinchor, proposer des semestres de formations à l'Université de Toulon à l'UFR sciences et tech ou à l'école d'ingénieur SeaTech.

- Une des thématiques abordée depuis de nombreuses années est celle des phénomènes hors équilibre rencontrés notamment dans les rentrées atmosphériques, l'écoulement dans des micro-canaux ou encore tout procédé industriel opérant proche du vide. Nous avons initié une collaboration avec Stéphane Brull (Institut de mathématiques de Bordeaux) et Vincent Pavan (IUSTI, Marseille) dont l'objectif est la modélisation des régimes de transition, ou modérément hors équilibre. Nous tentons d'établir une approche unifiée des modèles dits "de relaxation" et avons déjà identifié par le passé une structure commune à bon nombre d'entre eux. Une nouvelle collaboration avec Michael Abdelmalik (Université de technologie d'Eindhoven) poursuit ce travail d'un point de vue pratique. Nous nous appuyerons sur une approximation des équations cinétiques par des systèmes aux moments et tenterons d'exploiter l'étude ci-dessus pour établir des modèles adaptés à ces systèmes et les tester sur des cas classiques.
- Enfin, le projet CALAME (demande de financement aux collectivités locales), transversal aux thématiques MN et AA du laboratoire IMATH, souhaite tirer profit des possibilités offertes par l'intelligence artificielle par apprentissage sur les données produites par les codes de calcul. Par exemple, deux codes du laboratoire (modélisation déterministe par EDP) permettent de simuler la propagation des feux de forêts pour l'un et le déferlement de vagues pour l'autre. L'objectif général est d'enrichir notre savoir-faire et d'élargir le champ d'utilisation de nos codes par apprentissage profond (AP) depuis nos simulations. À long terme, nos travaux devraient permettre de proposer des outils de gestion et de prévention des risques.

## **Projets de recherche de la thématique Informatique et Algèbre Appliquée IAA**

Un des projets a pour thème l'étude et la conception de boîtes-S pour la cryptographie et la cryptanalyse. Ce projet de recherche s'appuie sur une ANR, dénommée SWAP, qui a été déposée au printemps 2021 et acceptée à l'automne 2021. Ce projet concerne autant la conception pratique que théorique de ces primitives à clef secrète. Il s'articule sur deux volets.

1 Le premier volet propose notamment une étude mathématique théorique de la conjecture sur l'existence de fonctions asymptotiquement presque parfaitement non linéaires. Des résultats dans le sens de cette conjecture ont d'ores et déjà été obtenus et ont donné lieu à une thèse de doctorat en soutenue à l'automne 2022. La machinerie complexe mise en place est basée sur la caractérisation des polynômes Morse en caractéristique 2. Elle permet de comparer certains groupes

de monodromie afin d'appliquer le théorème de densité de Chebotarev et devrait encore pouvoir donner de nombreux nouveaux résultats.

2 Le second volet concerne la classification des applications vectorielles. L'objectif principal est de compter et de déterminer toutes les applications APN en dimension 6 à la CCZ équivalence près, en utilisant les méthodes utilisées avec succès dans les travaux de la thématique dans le cadre de la classification des fonctions booléennes. De cette étude ambitieuse, nous attendons des retombées sur des questions plus modestes comme la classification des fonctions booléennes en 7 variables (2022), ou encore la détermination des rayons de recouvrements des codes de Reed-Muller (2023) etc.

Un autre grand axe de recherche repose sur l'arithmétique modulaire sur des grands nombres. Dans cette direction, deux thèses débutent à l'automne 2022, l'une d'entre elles étant financée par l'AID (Agence pour l'Innovation de la Défense) ainsi que par l'Ecole des Mines de Saint-Etienne à Gardanne et l'Université de Toulon, l'autre étant financée entièrement via le ministère par l'Université de Toulon. Les thématiques abordées dans ces deux thèses sont les suivantes :

- systèmes modulaires (PMNS) : implantations logicielles sûres et efficaces, études paramétriques (taille des coefficients), exploitation des jeux d'instructions avancés des processeurs modernes (SIMD, RISC-V...),
- implantations multi-précisions,
- étude de systèmes hybrides (PMNS/RNS).

Le cas d'utilisation principal correspondant est la cryptographie post-quantique.

Enfin, un troisième grand axe concerne l'étude des points rationnels sur les corps finis des variétés algébriques et leurs applications aux codes géométriques algébriques. Emargeant à l'ANR Barracuda (2021-2025) et s'appuyant sur la direction d'une thèse, le projet consiste à travailler sur une approche euclidienne des nombres de points fermés de degrés donnés des courbes sur les corps finis. En effet, le théorème d'indice de Hodge implique que le pairing d'intersection sur le groupe de Neron-Severi de la surface obtenue en faisant le produit d'une courbe avec elle-même est anti-euclidien sur le supplémentaire orthogonal de l'hyperplan engendré par les classes des fibres verticales et horizontales. Les mineurs principaux de matrices de Gram bien choisies produisent des inégalités sur les nombres de points fermés des courbes. Cette approche nouvelle et prometteuse pourrait permettre d'estimer la quantité  $\rho(q,g)$  introduite par Tsfasman, Vladuts et Nogin, définie pour  $q$  et  $g$  fixés comme étant le plus petit entier  $r$  à partir duquel toute courbe algébrique projective de genre  $g$  définie sur le corps fini à  $q$  éléments admet des points fermés de tout degré plus grand que  $r$ .

Concernant la cryptographie et la théorie des codes et au-delà la sécurité des systèmes d'informations, la thématique IAA s'implique aussi dans la diffusion du savoir scientifique à travers l'organisation d'événements scientifiques. En effet, dans le cadre du semestre thématique "Statistiques arithmétiques : découvrir et prouver l'aléatoire en théorie des nombres" de l'université d'Aix-Marseille en 2023

au CIRM, comprenant le mois thématique "Arithmétique et Théorie de l'Information" nous sommes engagés dans l'organisations des manifestations suivantes :

- AMUSEC 2023 (Forum de l'AMU sur la Cybersécurité)
- COGNAC (Colloque international sur les variétés algébriques sur les corps finis et les codes géométriques algébriques), du 13 au 17 février 2023.

## Probabilié

### **EDSR quadratiques singulières et maximisation d'utilités.**

La maximisation de l'utilité logarithmique, l'utilité puissance et l'utilité de Kreps-Porteus via les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades était restée ouverte depuis le travail de Duffie & Epstein, (Econometrica 1992), voir aussi le travail de Hu-Imkeller-Muller (Annals of Appl Probab 2005). Le travail en cours (<https://arxiv.org/abs/1810.05664>), avec Ludovic Tangpi, de l'université de Princeton, répond positivement à cette question en utilisant les EDSR quadratiques singulières. L'utilisation des EDSR permet de traiter le cas markovien, le cas non markovien et aussi le cas où la dynamique (diffusion) peut dégénérer. Pour résoudre les EDSR quadratiques singulières nous utilisons la méthode de domination introduite dans (<https://hal.science/hal-01972711v2>). Nous nous continuons à développer ce travail pour étendre cette étude à des problèmes de contrôles dont la dynamique est plus complexe et aussi pour l'étude d'autres EDSR. Sont également envisagées des applications à des équations aux dérivées partielles (EDP) singulières qui apparaissent en physique, voir par exemple : F. Merle (Comm. Pure. Appl. Math. 1992) et A. Dall'Aglio, L. Orsina, and F. Petitta; (Nonlinear Analysis 2016).

**Unicité des EDSR quadratiques non convexes et non bornées.** Le problème d'unicité d'EDSR quadratiques (régulières et singulières) non convexes et non bornées reste une question ouverte. Ce problème, assez difficile, est l'objet d'un travail avec Brahim Boufoussi et Soufiane Mouchtabih de l'université de Marrakech. Des applications aux équations aux dérivées partielles (EDP) sont envisagées, en particulier l'unicité de solutions non bornées de l'EDP de Burgers.

**EDS à champ moyen et comportements asymptotiques.** Les EDS à champ moyen (ou EDS de McKean-Vlasov) ne sont pas markoviennes, d'où l'intérêt de la question de l'existence et unicité des probabilités invariantes associées aux solutions de ces EDS. Cette question est l'objet du projet de travail avec L. Tangpi. A noter que les probabilités invariantes sont utilisées pour étudier des comportements asymptotiques; homogénéisation, comportement long en temps etc. Nous comptons également travailler sur le comportement asymptotique des EDS à champ moyen lorsqu'il n'y pas de probabilité invariante. Pour ce faire, nous pensons utiliser les méthodes développées dans (<https://hal.science/hal-00266406v2>). Cette question peut être liée à la "Master Equation" étudiée en théorie des jeux à champ moyen par A. Bensoussan et al. et aussi par Lasry-Lions en 2005.

**Principe du maximum de Pontryagin en contrôle des équations différentielles (EDO et EDS à champ moyen) .** Quand le coefficient de l'EDO est seulement Lipschitz, il n'est alors dérivable que presque partout. Dans ce cas, une difficulté réside en la définition de l'équation adjointe? Avec Brahim Mezerdi, nous envisageons de travailler sur cette question en gardant la dérivation presque partout. Car elle donne une formulation ponctuelle (non multivoque) du principe de Pontryagin. L'idée est d'utiliser une randomisation qui permet d'empêcher la solution de séjourner dans les ensembles Lebesgue négligeables. Cette randomisation sera également utilisée dans le contrôle d'EDS à diffusion dégénérée. Ceci permet de donner un lien entre le principe de Pontryagin et le principe de Bellman (principe de programmation dynamique). L'étude sera également étendue aux EDS à champ moyen contrôlées.

**Problème de Monge-Kantorovich et EDS.** Il y a une analogie entre solutions fortes/faibles pour les EDS d'Itô et les solutions Monge/Kantorovich en transport optimal. Un lien a été établi entre solutions d'EDS et solutions de problèmes de Monge dans le travail <https://arxiv.org/abs/1303.6925> où il a été établi qu'une solution forte correspond à un problème de Monge particulier. La question qui se pose alors est : Une solution faible peut elle être liée à un problème de Kantorovich dans certaines situations? Et par analogie avec les EDS peut on dans ce cas établir des résultats du type Yamada-Watanabe (en EDS) en transport optimal ?