LE JEU DE NIM

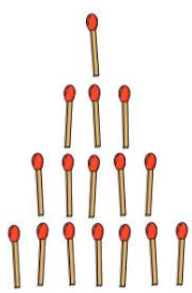
RÉMY DEGRAEVE

«Je connais un jeu ou je gagne toujours.»
«Si vous ne pouvez pas perdre, ce n'est pas un jeu !»
«Je peux perdre, mais je gagne toujours.»
«Essayons !»

Répliques extraites du long-métrage d'Alain Resnais, *l'année dernière à Marienbad.*

Résumé. Dans cette note, nous expliquons la statégie gagnante décrite par Charles Bouton pour jouer les bons coups d'une variante des jeux de nim.

1. Jeu de Nim



Le jeu de Nim ou jeu de Marienbad se joue à deux joueurs. On dispose sur une table 4 rangées d'allumettes, 1 allumette sur la première rangée, 3 allumettes sur la deuxième, 5 allumettes sur la troisième et 7 allumettes sur la quatrième.

Chaque joueur joue un coup à tour de rôle. Un coup s'effectue de la manière suivante : le joueur choisit un rangée et y enlève autant d'allumettes qu'il souhaite, il est obligé d'enlevé au moins une allumette. Le joueur qui ne peut plus enlever d'allumettes perd la partie. Le jeu de Nim a été analysé par Charles Bouton [1], dans son article, il décrit les positions perdantes en termes de Nim-addition. Une position du jeu est modélisée par un quadruplet d'entiers naturels (A, B, C, D), par exemple, $(1, 3, 5, 7)$ représente la position initiale et $(0, 0, 0, 0)$ la position finale. Dans la suite, on utilise la notion $(A', B', C', D') \leftarrow (A, B, C, D)$ pour dire que $X' = X$ pour trois des entiers A, B, C et D sauf pour le quatrième qui doit vérifier $X' < X$. Autrement dit un coup dans la position (A, B, C, D) conduit à une position (A', B', C', D').

L'objectif de cette note est de fournir une démonstration du théorème suivant

Théorème 1 (Bouton, 1901)**.** *La position (A, B, C, D) est perdante si et seulement si la nim-somme $A \oplus B \oplus C \oplus D$ est nulle.*

Dans la section 2, nous définirons la Nim addition et les propriétés de la Nim-somme de deux entiers. Le théorème sera une conséquence directe des deux lemmes de la section 3.

Date: Décembre 2017.

2. Nim-Addition

La Nim-addition est définie à partir de la représentation binaire des entiers. Un entier naturel a se décompose d'une seule façon en somme de puissance de 2. Par exemple, le nombre 37 se décompose en puissance de deux

$$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0$$

On écrira sous une forme plus compacte $37 = (100101)$ qui est la représentation binaire de l'entier 37. D'une manière générale, $(a_n \dots a_2 a_1)$ désigne la représentation binaire d'un entier a, ce qui signifie, d'une part, que les enties a_i sont compris entre 0 et 1 et que, d'autre part,

$$a = a_n 2^{n-1} + \cdots + a_2 2^1 + a_1 2^0,$$

Le chiffre a_1 est le chiffre des unités, on dit que k est l'indice de poids fort de a quand $a_k = 1$ et tous les chiffres d'indice supérieur à k sont nuls.

L'entier n est la taille binaire de a, on remarque que le plus grand nombre de taille n est

$$(1 \dots 11) = 2^{n-1} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$$

En effet, en utilisant la relation $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, donc $2^{k+1} - 2^k = 2^k$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^n - (1 \dots 11) &= 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2^1 - 2^0 \\ &= 2^{n-1} - 2^{n-2} - \cdots - 2^1 - 2^0 \\ &= 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots - 2^1 - 2^0 \\ &\vdots \\ &= 2^2 - 2^1 - 2^0 \\ &= 2^1 - 2^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

La nim somme des entiers a et b, notée $a \oplus b$, se définit à partir des représentations binaires, le k-ième chiffre binaire de $a \oplus b$ étant

$$(a \oplus b)_k = \begin{cases} 1, & a_k \neq b_k \\ 0, & a_k = b_k \end{cases}$$

Par exemple,

$$37 \oplus 15 = (100101) \oplus (1111) = (100101) \oplus (001111) = (101010) = 42$$

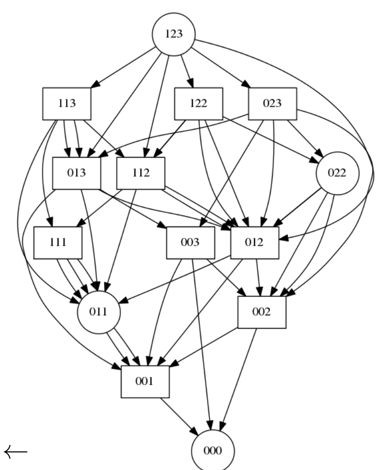
La nim addition possède des propriétés similaires à l'addition usuelle. Elle est commutative $a \oplus b = b \oplus a$, 0 est neutre $0 \oplus a = a$ et la table (1) prouve qu'elle est associative. Contrairement à l'addition des entiers, tout élément est son propre opposé $a \oplus a = 0$.

Table 1. Table de vérité

a_k	b_k	c_k	$(a \oplus b)_k$	$\big((a \oplus b) \oplus c\big)_k$	$(b \oplus c)_k$	$\big(a \oplus (b \oplus c)\big)_k$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

3. stratégie gagnante

Nous partionnons les positions du jeu de nim en deux ensembles. L'ensemble $\mathcal{P}$ des positions (A, B, C, D) satisfaisant $A \oplus B \oplus C \oplus D = 0$, et $\mathcal{G}$ toutes les autres. Le théorème de Bouton affirme que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des positions perdantes. Nous pouvons affirmer que le jeu de nim possède un total de 384 positions dont 48 sont perdantes et 336 sont gagantes. La position initiale fait partie des positions perdantes dans laquelle on peut jouer 16 coups qui conduisent tous à une position gagnante. La figure de droite illustre la complexité du graphe des positions du jeu à 3 tas d'une, deux et trois allumettes. Les 4 positions encerclées sont perdantes.



Lemme 1. *Si* $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}$ *et* $(A', B', C', D') \leftarrow (A, B, C, D)$ *alors il est obligatoire que* $(A', B', C', D') \in \mathcal{G}$.

Démonstration. En effet, si $A \oplus B \oplus C \oplus D = 0$ alors $A \oplus (B \oplus C \oplus D) = 0$ ou encore $A = B \oplus C \oplus D$. Supposons que $A' \oplus B' \oplus C' \oplus D' = 0$ avec $A' \neq A$, il vient que $A' = B' \oplus C' \oplus D' = B \oplus C \oplus D = A$, ce qui absurde. □

Lemme 2. *Si* $(A, B, C, D) \in \mathcal{G}$ *alors il existe une manière de jouer pour que* $(A', B', C', D') \in \mathcal{N}$.

Démonstration. $A \oplus B \oplus C \oplus D = S < 0$. S n'est pas nul on note K l'indice de bit de poids fort. On peut donc dire que pour un des nombre (A', B', C', D'), le Kième chiffre est 1. Supposons que c'est le cas de A. La décomposition des nombres A, S et $A\oplus$ est décrite dans le tableau :

$*$	$\dots$	$*$	1	$*$		$\dots$	$*$	A
0	$\dots$	0	1	$\star$		$\dots$	$\star$	S
$*$	$\dots$	$*$	0	?		$\dots$	?	$A \oplus S$

On remarque que $A \oplus S < A$. On a

$$(A \oplus S, B, C, D) \leftarrow (A, B, C, D)$$

et $(A \oplus S) \oplus B \oplus C \oplus D = S \oplus A \oplus B \oplus C \oplus D = S \oplus S = 0$, autrement dit $(A \oplus S, B, C, D) \in \mathcal{P}$. $\square$

4. implantation en Langage C

Nous proposons maintenant un programme écrit en langage C qui joue au jeu de nim, suivant la stratégie que nous avons décrite. L'opérateur XOR du langage, réalise la nim somme dont nous avons besoin.

```c
int indice( int x )
{
// indice du bit de poids fort
int r = 0, k;
while ( x > 0 ) {
    if ( x & 1 ) k = r;
    r = r + 1;
    x = x / 2;
}
return k;
}
```

```c
void joue( int r[] )
{
int k, i, s;
s = grundy( r );
// precondition : s > 0
k = indice( s );
for( i = 0; i < nb ; i++ )
  if ( r[i] & ( 1 << k ) )
     break;
r[i] = r[i] ^ s ;
}
```

L'opérateur & "et bit-à-bit" est utilisé dans la fonction `int indice( int x)` pour déterminer l'indice du bit de poids fort de x. On l'utilise avec l'opérateur de décalage << dans la fonction `void joue( int r [] )` pour déterminer le tas dans lequel il faut jouer pour placer une position perdante.

Références

[1] Charles L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Ann. of Math. (2)*, 3(1-4) :35–39, 1901/02.